Contribución al Estudio de los Poliedros Regulares Convexos

I

I

TA
514
ALV-I
600107498

Prof. T. Alvarez Peralta

EUITIS
BIBLIOTECA

R. 7815
i 19024939

Estudio gráfico y analítico de los

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

A
514
ALV
I

Págs.

1 al 10

UNE A4 210 297

OBSERVACIONES PARA IMPRESIÓN

Frases sin subrayar ——— letra de texto vertical

Frases o letras con línea superior fina (recta o curva) — letra de texto cursiva

Frases subrayadas o letras —— letra negrita.

El texto en tinta roja, no se imprime.

Ver si es posible encontrar signo del punto en el centro de las minúsculas (8 · 15), probar si se puede componer · 8 15

Pedir paréntesis [para enumeración de fórmulas

Letra cursiva parecida a la de "Matemáticas" Doerfling (363).

EUITIS BIBLIOTECA

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Capítulo I

1. Objeto — Consideraciones generales

El presente trabajo tiene por objeto el estudio detallado de los poliedros regulares, tanto en el aspecto gráfico de su representación como en el analítico para el cálculo de sus elementos fundamentales.

En su estudio gráfico, elegimos como sistema de representación el llamado "Sistema diédrico", debido principalmente a que al aplicar los procedimientos generales estudiados en la Geometría Descriptiva (cambios de planos, giros y abatimientos) nos permite operar con gran claridad y exactitud, no solo para la simple representación de los poliedros, sino también para la obtención gráfica de sus elementos fundamentales, que nos han de servir de valiosa guía y ayuda en el cálculo analítico de dichos elementos.

Aún cuando el enfoque de este estudio es de aspecto puramente matemático, no se nos oculta la posibilidad de sus múltiples aplicaciones técnicas, especialmente en el campo de la arquitectura civil e industrial ya que, derivadas de los poliedros regulares, pueden obtenerse múltiples formas reticuladas espaciales que hoy día tanto se emplean para cubrir grandes espacios en forma de bóvedas poliédricas, que sustituyen ventajosamente a las esféricas de comple-

UNE A4 210 X 297

ja realización.

2. Consideraciones generales

La Geometría es la ciencia que estudia las propiedades de los cuerpos prescindiendo de sus propiedades físicas, y sólo tiene en cuenta las formas y dimensiones de los mismos. De aquí nace el concepto de "figura geométrica", ente ideal e intuitivo formado por un conjunto de puntos geométricos.

En toda figura geométrica se puede siempre considerar conjuntos parciales de infinitos elementos que forman líneas de contorno o interiores del cuerpo (rectas o curvas), superficies que lo separan del espacio exterior (planas o curvas) o puntos agrupados en espacios parciales (volúmenes).

Estos conjuntos parciales de infinitos elementos necesitan, para su estudio, de los conceptos generales de "punto", "recta" y "plano", conceptos primitivos e intuitivos, base y fundamento del desarrollo de la Geometría y de los cuales no puede darse una correcta definición. Son entes ideales sobre los que está basado todo el estudio de las diversas ramas de la Geometría racional, que a su vez forman parte de la Matemática en general.

La Geometría estudia pues las propiedades de las figuras geométricas. Éstas pueden ser clasificadas en dos grandes grupos:

UNE A4 210 X 297

1º Propiedades gráficas, en relación con la posición relativa de los elementos componentes y ligadas por tanto a los conceptos de punto, recta y plano.

2º Propiedades métricas, en relación con los conceptos de medida, referentes a las nociones de longitud (de un segmento), amplitud (de un ángulo) y extensión de una figura (área o volumen).

Estas propiedades pueden ser estudiadas conjunta o sistemáticamente separadas. En este último caso, el estudio de las propiedades gráficas es el objeto de la llamada "Geometría proyectiva", y el de las propiedades métricas de la llamada "Geometría métrica". El estudio simultáneo de ambas propiedades pertenece a la "Geometría métrico-proyectiva".

Para facilitar el estudio de la Geometría, aún cuando no es absolutamente necesario, se pueden considerar figuras geométricas situadas en un plano (formas planas), o en el espacio (formas espaciales), lo cual permite una división de la Geometría en "Geometría plana" y "Geometría del espacio".

Los poliedros regulares convexos, objeto de este estudio, son figuras geométricas espaciales de tres dimensiones, en el cual aplicaremos propiedades tanto de las figuras planas (lados, ángulos, polígonos y áreas) como las del espacio (superficies poliédricas, esferas y volúmenes).

UNE A4 210 X 297

3. Directrices seguidas en este estudio.

Para el desarrollo del presente trabajo, nos hemos marcado previamente unas directrices que nos habrán de servir de guía para obtener de forma ordenada las principales propiedades de los poliedros regulares, tanto gráficas como analíticas.

Como ya hemos indicado anteriormente, estas propiedades son objeto de estudio en la Geometría métrico-proyectiva, en la que generalmente las figuras en el espacio se representan en perspectiva (axonométrica), a fin de facilitar su mejor comprensión. Es indudable que esta representación da una idea bastante aproximada de la forma de la figura estudiada, que se asemeja a la obtenida en su visión directa; más por otra parte presenta el inconveniente de que la perspectiva, en general, deforma las medidas longitudinales o angulares lo cual da lugar en esta representación a que segmentos iguales (o ángulos) en el espacio, aparezcan en la figura como desiguales (o viceversa), por cuyo motivo resulta a veces penoso el seguir un razonamiento sobre dichas figuras.

Estos inconvenientes de representación, tanto en el sistema indicado como en otros que detallaremos después, son motivados al intentar resolver la dificultad de representar en un plano (plano del dibujo) que solo tiene dos dimensiones, una figura tridimensional.

UNE A4 210 X 297

Por otra parte, en el estudio de las propiedades métricas de las figuras, pueden seguirse dos caminos diferentes:

a) El de la Geometría métrica que utiliza los conceptos básicos de medida de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos para la determinación de longitudes (rectas o curvas), superficies (planas o curvas) y volúmenes (sólidos geométricos.

b) El de la Geometría analítica que, con los recursos del Álgebra, transforma las relaciones métricas en ecuaciones algebraicas mediante el empleo de coordenadas referidas a un sistema de ejes orientados, que en el espacio forman un triedro, generalmente trirrectángulo, cuyas coordenadas pueden ser o bien tres segmentos rectilíneos (coordenadas cartesianas) o bien un segmento y dos ángulos (coordenadas polares)

4. Sistemas de representación

Trataremos exclusivamente en este estudio de la representación de figuras espaciales que pueden referirse a formas exteriores o interiores de objetos físicos que siempre tienen tres dimensiones, o de figuras geométricas; también incluiremos en esta representación las de figuras planas que tengan una determinada posición en el espacio. Por el contrario no incluiremos la representación de figuras planas en su propio plano, ya que este caso no presenta ninguna dificultad de trazado ni de interpretación.

UNE A4 210 X 297

Para que un sistema de representación sea eficaz en el estudio de las propiedades de las figuras geométricas, es necesario que cumpla las dos condiciones siguientes:

1ª Que dado un objeto o figura en el espacio, se pueda obtener la representación de la misma en un plano, mediante la construcción de una o varias figuras relacionadas con el mismo, de tal manera que exista una correspondencia, entre éstas y el objeto, de forma (biunívoca).

2ª - Que, recíprocamente, dada la representación sobre un plano con una o varias figuras que se correspondan con la forma del objeto representado, poder deducir sin ambigüedad la forma y dimensiones de dicho objeto.

De lo expuesto anteriormente podemos puntualizar que el problema fundamental planteado en la representación de figuras espaciales consiste, (según hemos indicado anteriormente,) en la dificultad de representar en un plano que sólo tiene dos dimensiones, un objeto determinado que siempre tiene tres dimensiones.

Para conseguirlo existen diversos procedimientos conocidos con el nombre genérico de "Sistemas de representación".

Los más fundamentales y de mayor aplicación son los siguientes:

1. Sistema diédrico
2. Sistema axonométrico
3. Sistema de plano acotado
4. Sistema cónico

UNE A4 210 X 297

4.1 Sistema diédrico

En este sistema, el objeto a representar (fig. 1), se proyecta ortogonalmente sobre dos planos indefinidos perpendiculares entre sí; después de obtenidas sus proyecciones sobre cada uno de ellos, se hace girar uno de los planos junto con su proyección correspondiente, hasta hacerlo coincidir con el plano del otro. De la correspondencia de las dos figuras proyección, situadas en un plano único (plano del dibujo), se deduce la forma y dimensiones del objeto en el espacio.

(Ficha 2)

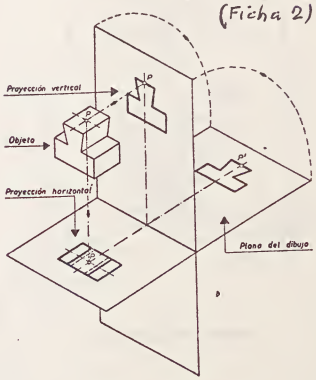

Fig. 1. - Sistema diédrico

Este sistema es el empleado casi exclusivamente en el Dibujo técnico, pues permite obtener con relativa facilidad las verdaderas magnitudes de segmentos rectilíneos y ángulos mediante el empleo sistemático de métodos adecuados (cambios de plano, giros o abatimientos), y en muchos casos directamente sobre sus proyecciones (segmentos o lados de ángulos paralelos a uno de los planos de proyección).

Su estudio y aprendizaje necesitan esfuerzo mental y tiempo hasta conseguir acostumbrarse a ver en el espacio, es decir, a deducir de una o varias figuras simultáneas que corresponden a distintas vistas o proyecciones de un mismo objeto, la forma que tiene el cuerpo en el espacio.

UNE A4 210 X 297

4.2 Sistema axonométrico

En este sistema el objeto a representar se proyecta ortogonalmente sobre las tres caras de un triedro trirrectángulo de ejes orientados (fig.2) y al mismo tiempo sobre un plano oblicuo a dichas tres caras, llamado plano del dibujo, (a veces) de cuyas proyecciones se representa tan sólo esta última oblicua, junto con la de los ejes o aristas del triedro.

Ficha 2

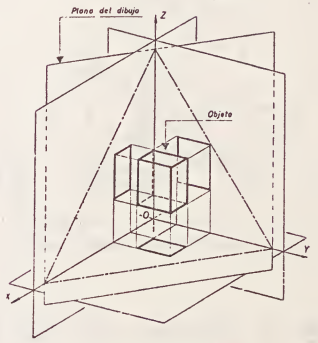

Fig. 2. - Sistema axonométrico

Esta última proyección tiene una apariencia de perspectiva que suele dar una idea muy aproximada de la forma del objeto en el espacio.

El sistema axonométrico permite la medida directa de segmentos paralelos a los ejes de proyección, mediante escalas adecuadas de reducción, una en el llamado sistema isométrico, dos en el sistema dimétrico y tres en el sistema trimétrico. Por el contrario, las medidas directas de segmentos no paralelos a los ejes y las amplitudes angulares necesitan construcciones auxiliares, ya que resultan deformadas en esta proyección oblicua.

4.3 Sistema de plano acotado

En este sistema se toma un plano de referencia como

UNE A4 210 X 297

plano del dibujo. En él se proyectan ortogonalmente los puntos del objeto a representar (fig. 3) y junto a cada punto proyectado se consigna, en una unidad elegida, la cifra correspondiente a la distancia que hay desde el punto al plano de proyección. Esta cifra va afectada del signo más o menos, según que el punto esté por encima o debajo del plano de referencia. Se emplea este sistema en cartografía y dibujos topográficos.

Ficha 2

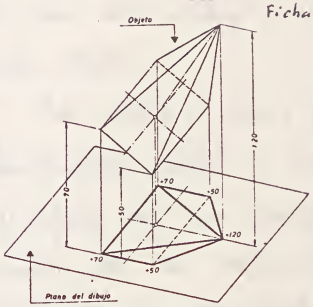

Fig. 3. - Sistema de plano acotado

4.4 Sistema cónico

Todos los puntos del objeto a representar, supuesto situado en el espacio en una posición determinada, se unen con un punto fijo llamado vértice o punto de vista principal, con lo cual obtendremos una radiación de rectas. Si cortamos esta radiación de rectas (fig. 4) por un plano cualquiera, a cada punto del objeto le corresponderá otro del plano, situados ambos en el mismo rayo. El plano secante es el plano del dibujo, y la figura resultante al unir

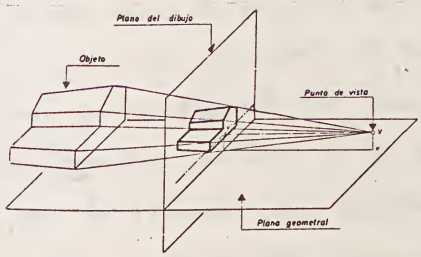

Fig. 4. - Sistema cónico

UNE A4 210 X 297

ordenadamente las proyecciones de los puntos del objeto sobre el plano del dibujo, es la llamada perspectiva cónica de dicho objeto.

Este sistema tiene gran aplicación en Arquitectura y Construcción civil, y con él obtenemos la visión monocular del objeto con una perspectiva casi real. Tiene el inconveniente de la dificultad de obtención de medidas de segmentos y amplitudes angulares (son posibles de obtener).

5. Métodos elegidos

Consecuentes con las directrices marcadas anteriormente elegimos los siguientes métodos de trabajo:

A) Para el estudio de las propiedades gráficas, el Sistema diédrico de representación que en muchos casos, y para facilidad de interpretación, ampliamos con la proyección en un plano de perfil teóricamente innecesario, pero que prácticamente nos facilita dicho estudio al aclarar dudas de interpretación que con frecuencia se presentan cuando el trazado es tan solo de dos proyecciones.

B) Para el estudio de las propiedades métricas hacemos uso principalmente de fórmulas deducidas y estudiadas en la Geometría métrica, y de desarrollos algébricos elementales para la obtención de resultados, generalmente enfocados a la medición de segmentos o ángulos. Sólo en casos excepcionales hacemos uso de las ecuaciones planteadas y estu-

UNE A4 210 X 297

Págs.

11 al 20

dadas en la Geometría analítica.

Al tener que usar indistintamente métodos empleados en diversas ramas de la matemática, como son por una parte los gráficos de la "Geometría descriptiva" en su sistema diédrico, los métricos de la "Geometría métrica" y los analíticos de la "Geometría analítica", es muy conveniente establecer una clara coordinación de estas disciplinas, principalmente en relación con una común nomenclatura en la designación de puntos, rectas, planos, ángulos, etc.
Por otra parte, y teniendo en cuenta las posibles aplicaciones de este estudio a muy diversos sectores de la técnica, dicha coordinación debe extenderse también al Dibujo técnico cuyos principios de representación son análogos a los del sistema diédrico, pero que al emplear sistemáticamente una amplia normalización, sin perjuicio de la claridad y exactitud, tiende a simplificar al máximo su ejecución e interpretación.

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA BIBLIOTECA

6. Nomenclaturas empleadas

Como justificación del criterio seguido en la elección de la nomenclatura adoptada, vamos a realizar previamente un resumen de la comunmente empleada en el estudio de la Geometría métrica, de la Geometría descriptiva y de la Geometría analítica, así como la referente al Dibujo técnico

6.1 Nomenclatura de la Geometría métrica

Ya hemos indicado anteriormente que en el estudio de las propiedades de las figuras geométricas del espacio, se utilizan como medios gráficos de expresión, perspectivas axonométricas de dichas figuras que suelen dar una sencilla visión de conjunto de su forma y que permite seguir con relativa facilidad el razonamiento geométrico.

Una dificultad no pequeña de este sistema de representación en figuras espaciales es debida a la deformación geométrica de los elementos en perspectiva (líneas, ángulos o superficies). El concepto de la forma no se obtiene con la misma facilidad que en las figuras planas, y es necesario prestar la debida atención para p. e. darse cuenta que, en el cubo representado en la figura 5, la recta $\overline{AC}$ es una diagonal de dicho cubo, y por lo tanto de mayor longitud que la arista $\overline{BC}$; que el ángulo $\widehat{CDA}$ que aparece como agudo es en realidad recto, y que finalmente el ángulo $\widehat{ACE}$ que aparece como obtuso, es agudo.

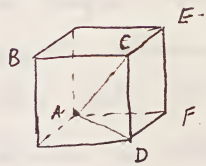

Figura 5

La nomenclatura más empleada, es la siguiente:

6.11 (Nomenclatura) para designar puntos aislados de una figura en el espacio

Se utilizan preferentemente letras mayúsculas latinas, y se lee p. e. punto: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, etc. (fig. 5). También

UNE A4 210 X 297

se utilizan cifras cuando los puntos a designar son muy numerosos.

6.12 (Nomenclatura) para la designación de rectas o segmentos rectilíneos

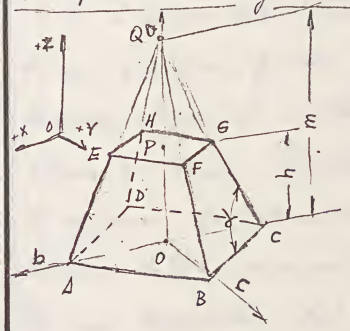

Figura 6

Si las rectas se consideran indefinidas, se designan con una letra minúscula latina; así p. e. para designar los ejes axonométricos de la figura 6, diremos recta (o eje) $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ o $\widehat{c}$.

Si se considera tan solo un segmento rectilíneo, se le designa normalmente con las letras mayúsculas de sus puntos extremos, y así diremos p. e. (fig. 6) segmento $\widehat{AB}$, $\widehat{EG}$, etc. También pueden designarse segmentos rectilíneos por letras minúsculas latinas, siempre que en la figura estén debidamente acotados según las normas correspondientes que se utilizan en el Dibujo técnico. Refiriéndonos a la figura 6, podemos designar indistintamente las alturas del tronco de pirámide o de la pirámide completa por los segmentos $\widehat{OP}$ y $\widehat{OQ}$, o también por los segmentos $\widehat{h}$ y $\widehat{m}$.

6.13 (Nomenclatura) para la designación de planos indefinidos o limitados por un contorno rectilíneo o curvilíneo.

UNE A4 210 X 297

Para la designación de planos indefinidos se utilizan preferentemente letras mayúsculas del alfabeto griego, (ó y así se dice p.e., plano "Δ", "Φ", "Σ", etc. } la primera — si no hay tipo de imprenta

Si el plano está limitado por un contorno poligonal (caras de un poliedro) puede designarse por la enumeración ordenada (parcial o total) de sus vértices, y así se dice plano (o cara) $\overset{\frown}{ABCDEF}$, $\overset{\frown}{1\text{-}2\text{-}3\text{-}4}$ ó $\overset{\frown}{AB\ldots EF}$. Si el contorno del plano es parcial o totalmente curvilíneo, se colocan letras mayúsculas (o cifras) intermedias en puntos no definidos del contorno y se lee como el anterior.

Independientemente de la nomenclatura expuesta, y teniendo en cuenta que un plano queda perfectamente determinado cuando pasa por: 1) tres puntos no alineados; 2) dos rectas secantes o paralelas; 3) una recta y un punto exterior a ella, podremos designar también dicho plano por la de los elementos que lo determinan, y así diremos plano $\overset{\frown}{ABC}$ (que pasa por tres puntos dados), plano $\overset{\frown}{ab}$ (que pasa por las dos rectas $\overset{\frown}{a}$ y $\overset{\frown}{b}$ secantes o paralelas) y plano $\overset{\frown}{aM}$ (que pasa por la recta $\overset{\frown}{a}$ y el punto exterior $\overset{\frown}{M}$.

6.14 (Nomenclatura) para la designación de ángulos

Los ángulos pueden designarse por la de las dos rectas que lo forman, y así decimos ángulo $\overset{\frown}{ab}$ refiriéndonos al formado por las rectas $\overset{\frown}{a}$ y $\overset{\frown}{b}$; en este de-

UNE A4 210 X 297

signación suele existir cierta ambigüedad, ya que el ángulo formado por dos rectas indefinidas que se cortan en general oblicuamente, puede ser agudo u obtuso, según se considere el menor de ellos o el suplementario. Esta ambigüedad desaparece al orientar debidamente las semirrectas con origen en el vértice del ángulo.

Mejor designación es la de enumerar el ángulo (si es menor de dos rect.) mediante un punto tomado arbitrariamente en cada lado y el vértice, colocando siempre la letra del vértice en el centro; así diremos ángulo $\widehat{AOB}$ de lados (semirrectas) $\widehat{OA}$ y $\widehat{OB}$, y vértice $\widehat{O}$.

También es frecuente (y más preciso) la designación del ángulo con letras minúsculas griegas, siempre y cuando su amplitud esté debidamente acotada con la misma letra griega en el figura correspondiente; refiriéndonos a la figura 6, podemos decir indistintamente ángulo $\widehat{GCB}$ (el formado por las rectas $\widehat{GC}$ y $\widehat{CB}$), o también ángulo $\widehat{\alpha}$ (acotado). Esta designación sirve para ángulos de amplitud hasta cuatro rectos.

6.2 Nomenclatura en el sistema diédrico de representación.

Según hemos indicado en el párrafo 4.1, el sistema diédrico opera fundamentalmente con las proyecciones ortogonales de figuras geométricas sobre dos planos perpendiculares entre sí, cuyas proyecciones se llevan a un

UNE A4 210 X 297

plano único (plano del dibujo), mediante el giro de uno de ellos hasta su coincidencia con el plano del otro.

A los planos básicos de representación se les denominan comunmente "planos de proyección" de los cuales a uno se le llama "plano vertical" (ya que se supone ocupa permanente esta posición con respecto a la superficie terrestre), y al segundo "plano horizontal" (por los mismos motivos anteriores). A la intersección (recta) de ambos planos se la llama "línea de tierra" (línea horizontal). Si se supone que el plano que abatimos es el horizontal, el plano del dibujo será vertical (encerado), y por el contrario si el plano que gira es el vertical, el plano del dibujo será horizontal (mesa de dibujo). Las denominaciones anteriores son totalmente convencionales, ya que los planos de proyección sólo sirven como sistemas de referencia para el conocimiento de las posiciones relativas de puntos en el espacio y también para la del observador, pudiendo pues ocupar una posición cualquiera en el espacio e incluso ser móviles. No obstante simplifica mucho esta nomenclatura que tiene gran sentido en sus aplicaciones técnicas (dibujo industriales, arquitectónicos, etc.).

Los planos vertical y horizontal, (que se suponen indefinidos) dividen al espacio en cuatro regiones distintas llamadas "cuadrantes", y para distinguirlos se numeran sucesivamente del 1º al 4º,

UNE A4 210 X 297

en el orden que se indica en la figura 7. El objeto a proyectar puede estar situado, en general, en cualquier cuadrante. Como en el sistema diédrico se opera exclusivamente con las proyecciones de las figuras, después de transportadas al plano del dibujo, el colocar el objeto en los cuadrantes 2º, 3º y 4º da lugar a que la representación resulte confusa por superponerse las proyecciones después de abatidas (cuadrantes 2º y 4º) o por su falta de visibilidad (cuadrante 3º). Por los motivos expuestos debe procurarse colocar las figuras exclusivamente en el primer cuadrante, con lo cual sus proyecciones quedan netamente separadas por la línea de tierra (la vertical encima y la horizontal debajo) y son ambas visibles.

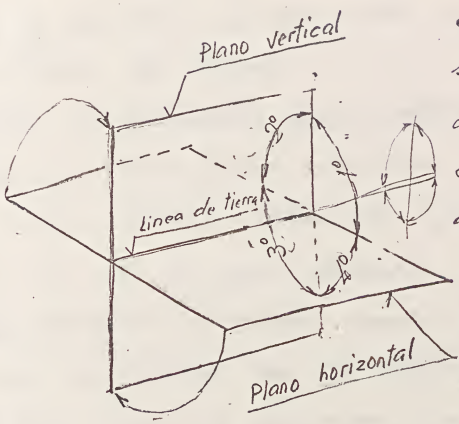

Figura 7

Esta limitación es de carácter exclusivamente práctico y a veces no es posible aplicarla totalmente en el estudio de las figuras, lo cual no presenta tampoco grandes inconvenientes, sino mayor atención y cuidado en el estudio de los puntos, rectas, etc. que qui-

UNE A4 210 X 297

dan en todo caso perfectamente puntualizados con la nomenclatura y posición de sus puntos proyectados con respecto a la línea de tierra.

A veces es conveniente, para facilidad de interpretación, utilizar un tercer plano auxiliar de proyección, perpendicular a los anteriores, llamado "plano de perfil" que se abate a su vez por giro alrededor de su intersección con el plano vertical (también puede hacerse con el horizontal), hasta su coincidencia con el plano del dibujo (fig. 8).

Los tres planos de proyección (vertical, horizontal y de perfil) se consideran siempre indefinidos y forman en el espacio un triedro trirrectángulo que dividen al mismo en ocho regiones distintas llamadas "octantes" que se enumeran sucesivamente del 1º al 8º, en el orden que se indican en la figura 8.

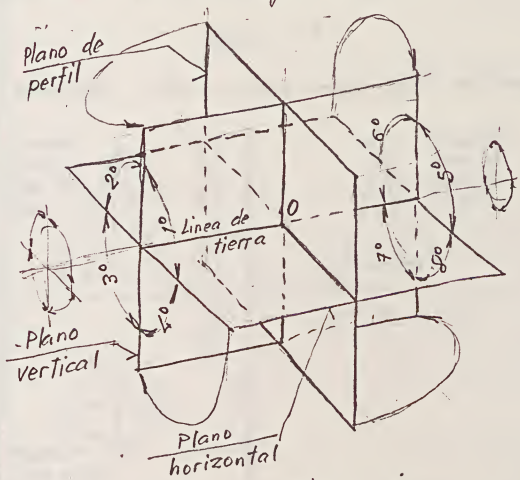

Figura 8

Cuando se utilizan los tres planos de proyección, debe colocarse preferentemente la figura en el espacio en el primer octante, para que la proyección vertical de la misma quede por encima de la línea de tierra, la horizontal debajo, y la

UNE A4 210 X 297

de perfil a la derecha de la vertical. Para conseguir esto basta colocar las dos rectas intersección (trazas) del plano de perfil con los vertical y horizontal, (que después del abatimiento son coincidentes), a la derecha de la proyección vertical.

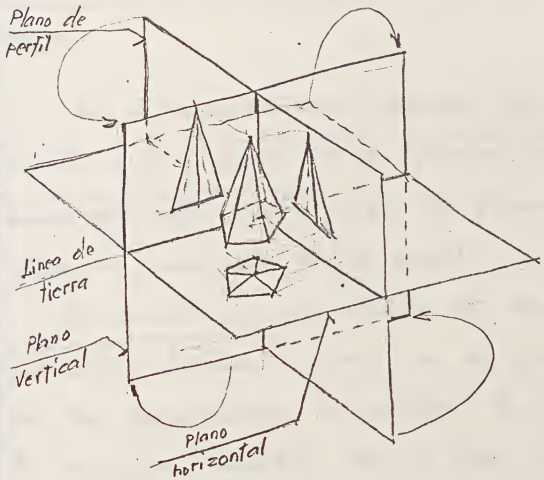

Figura 9

En la figura 9, aclaramos gráficamente los conceptos anteriores con una representación espacial en perspectiva axonométrica, en la que el objeto representado es una pirámide recta regular de base pentagonal, paralela ésta al plano horizontal. Dicha pirámide está situada en el primer octante.

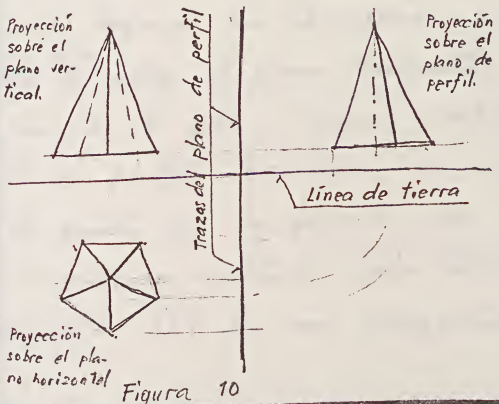

Figura 10

En la figura 10 están representadas las proyecciones de la pirámide en los tres planos de referencia y realizado el abatimiento, junto con sus proyecciones, del horizontal y de per-

UNE A4 210 X 297

fil sobre el plano del dibujo (el vertical), según se indica en la figura 9.

La nomenclatura más empleada en el sistema diédrico es la siguiente:

6.21 (Nomenclatura) para la designación de puntos aislados de una figura.

En la representación diédrica hay que distinguir claramente entre 'puntos de la figura en el espacio' y 'proyecciones de estos puntos' sobre los planos vertical, horizontal y algunas veces sobre el de perfil.

Los puntos en el espacio se designan con 'letras mayúsculas latinas' (como en la Geometría métrica), y para las proyecciones se utiliza la misma letra mayúscula con una comilla, dos o tres, según que la proyección sea la horizontal, vertical o de perfil; así p.e. cuando se designe punto $\overset{\frown}{M}$, se refiere a un punto de una figura en el espacio; punto $\overset{\frown}{M'}$ es la proyección de $\overset{\frown}{M}$ sobre el plano horizontal; punto $\overset{\frown}{M''}$ es la proyección de $\overset{\frown}{M}$ sobre el plano vertical, y punto $\overset{\frown}{M'''}$ sobre el de perfil. También se utilizan cifras cuando los puntos de la figura son numerosos, y se sigue el mismo criterio para distinguir los puntos del espacio. $\overset{\frown}{(5)}$, de sus proyecciones $\overset{\frown}{(5', 5'', 5''')}$.

UNE A4 210 X 297

Págs.

21 al 30

6.22 (Nomenclatura) para la designación de rectas o segmentos rectilíneos.

Si las rectas se consideran indefinidas, se designan con una letra minúscula latina (como en Geometría métrica), y para las proyecciones se utiliza la misma letra minúscula con una comilla, dos o tres, según que la proyección sea la horizontal, vertical o de perfil; así p. e. cuando se designe recta $\overset{\frown}{a}$ se refiere a una recta perteneciente a una figura en el espacio; recta $\overset{\frown}{a'}$ es la proyección de $\overset{\frown}{a}$ sobre el plano horizontal; recta $\overset{\frown}{a''}$ es la proyección de a sobre el vertical, y recta $\overset{\frown}{a'''}$ sobre el de perfil.

Si se considera tan sólo un segmento rectilíneo, se le designa, como en Geometría métrica, con las letras mayúsculas de sus extremos (en el espacio), y con una, dos o tres comillas en sus proyecciones. Así p. e. al hablar del segmento $\overline{A''B''}$ se refiere a la proyección vertical del segmento $\overline{AB}$ en el espacio, cuyos extremos son los puntos $\overset{\frown}{A}$ y $\overset{\frown}{B}$.

También pueden designarse segmentos rectilíneos por letras minúsculas latinas con sus comillas correspondientes, siempre que en la respectiva proyección estén debidamente acotados según normas del Dibujo técnico.

6.23 (Nomenclatura) para la designación de planos indefinidos o limitados por un contorno rectilíneo

UNE A4 210 X 297

EUITIS
BIBLIOTECA

Cuando se haga referencia al plano en el espacio, pueden utilizarse, como en la Geometría métrica, letras mayúsculas del alfabeto griego. Pero en proyecciones diédricas no puede representarse el plano por las proyecciones de sus puntos que son infinitos, sino por las de los elementos que lo determinan, que como sabemos son: 1) Tres puntos no alineados; 2) una recta y un punto exterior a ella, y 3) por dos rectas secantes o paralelas. La designación de los elementos que definen el plano por sus proyecciones es la indicada en los párrafos 6.21 y 6.22.- Así p.e. diremos plano $a'D' - a''D''$ que interpretaremos como proyección horizontal y vertical de la recta a y del punto D, que determinan el plano en el espacio.

Es más frecuente el determinar un plano por las proyecciones de tres de sus puntos o de un contorno poligonal plano como son en general las caras límites de poliedros, y también el definirlo por dos rectas especiales del plano, llamadas trazas o intersecciones de dicho plano con los de proyección (rectas secantes o paralelas). Las trazas, o son paralelas, o secantes en un punto de la línea de tierra y tienen siempre una de sus proyecciones sobre dicha línea de tierra.

UNE A4 210 X 297

6.24 (Nomenclatura) para la designación de ángulos

Siguiendo el mismo criterio que en la Geometría métrica, los ángulos en el espacio se designan por un punto arbitrario en cada lado y su vértice (p.e. ángulo $\widehat{AOB}$) o por una letra griega minúscula (ángulo $\widehat{\alpha}$)

En proyecciones basta con encomillar adecuadamente la correspondiente designada, y así diremos p.e. ángulo $\widehat{A''O''B''}$ que deberá interpretarse como proyección vertical del ángulo $\widehat{AOB}$ del espacio; o también ángulo $\widehat{\beta'''}$ o proyección de perfil del ángulo $\widehat{\beta}$ del espacio. En este último caso debe acotarse debidamente la amplitud del ángulo en sus proyecciones respectivas.

6.3 Nomenclatura de la Geometría analítica

La Geometría analítica, al igual que la Geometría métrica, se ocupa de las propiedades de las figuras geométricas (formas, dimensiones y situación de las mismas); dichas figuras geométricas pueden ser planas o espaciales, dando lugar a la división de la Geometría analítica en "plana" y del "espacio". Se diferencia de la Geometría métrica en que no se vale tan sólo del Algebra elemental y de la Trigonometría, sino que por el contrario hace aplicación amplia más extensa del Algebra; las propiedades de las figuras geométricas y teoremas se deducen por cálculo algebraico pu-

UNE A4 210 X 297

ro, facilitando el análisis de curvas y superficies cuya investigación a base de construcciones elementales resulta muy penosa.

Los métodos empleados en la geometría analítica fijan la posición de los puntos de la figura geométrica estudiada mediante ciertas magnitudes geométricas denominadas coordenadas, y estableciendo ecuaciones entre las mismas se obtienen las propiedades de aquélla.

Las coordenadas son los elementos característicos operatorios de la geometría analítica. Sirven fundamentalmente para determinar la situación, tanto en el plano como en el espacio, de los puntos de la figura. Dos sistemas de coordenadas diferentes se emplean indistintamente en la geometría analítica, el de coordenadas paralelas o el de coordenadas polares. En ambos sistemas la situación de un punto cualquiera en el plano o en el espacio se establece por referencia a un sistema de rectas que se suponen fijas, llamados ejes coordenados. Los ejes coordenados son dos rectas secantes para las figuras planas y tres concurrentes y no coplanarias para las del espacio. El o los ángulos que forman los ejes coordenados pueden ser cualesquiera; en el caso particular y de más frecuente empleo de que sean rectos, las coordenadas parabelas se denominan coordenadas cartesianas

UNE A4 210 X 297

6.31 Nomenclatura de las coordenadas y ejes coordenados.

Recuerdo lo expresado anteriormente, los sistemas de coordenadas fundamentales son el de "coordenadas paralelas" y el de "coordenadas polares", pudiendo ambos emplearse tanto en el plano como en el espacio. Como caso particular del sistema paralelo existe el sistema de "coordenadas cartesianas". El fundamento y nomenclatura empleada en cada uno de ellos lo exponemos a continuación.

6.31 Sistema de coordenadas paralelas en el plano

Para fijar la situación de un punto en un plano por coordenadas paralelas, se fijan previamente en éste dos rectas secantes, llamadas "ejes coordenados", que se cortan formando un ángulo ω cualquiera. El punto de intersección de los ejes coordenados se denomina "origen" del sistema de coordenadas.

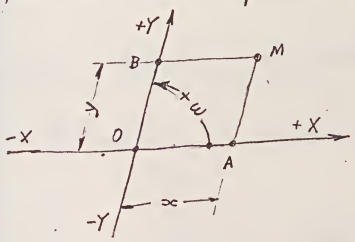

Figura 11

Si designamos los dos ejes por X e Y (fig. 11) podremos orientarlos debidamente dando a cada uno de ellos una dirección positiva desde el origen O hacia cierto lado, y negativa a la contraria. Proyectemos un punto M cualquiera del plano sobre el eje X mediante una paralela al Y, y sobre este último por una paralela al X.

UNE A4 210 X 297

Así obtendremos los puntos A y B, siendo la figura $OAMB$ un paralelógramo. El segmento OA es la coordenada x correspondiente al punto M, y el OB, es la coordenada y del mismo punto; de la figura se deduce que $OA = BM = x$, y $OB = AM = y$, siendo x e y las coordenadas paralelas del punto M. A las coordenadas x e y, se las llaman también *abcisa* y *ordenada* respectivamente del punto M.

Para la fijación del ángulo que forma el eje Y (u otra recta cualquiera) con respecto al eje X, se considera con orientación positiva el contrario al giro de las agujas de un reloj; así pues el ángulo ω (agudo u obtuso) que forman los semiejes positivos Ox y OY será el positivo que se obtenga al girar OX alrededor de O hasta coincidir con OY, siendo el giro en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

6.32 Sistema de coordenadas cartesianas en el plano

El sistema de coordenadas cartesianas en el plano puede considerarse como un caso particular del sistema de coordenadas paralelo, en el que el ángulo ω formado por los ejes coordenados, es recto ($\omega = \frac{\pi}{2}$).

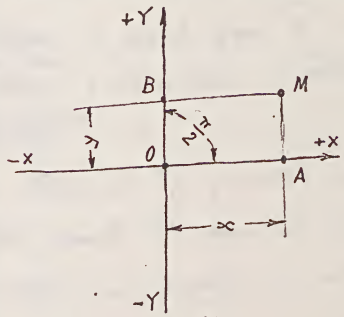

Figura 11

La nomenclatura y conceptos expuestos en el párrafo 6.32, se

UNE A4 210 X 297

conservan en este sistema (fig. 11). Las coordenadas cartesianas son más empleadas que las oblicuas ya que, en general, se simplifican los cálculos numéricos y ecuaciones algebraicas planteadas.

6.33 Sistema de coordenadas polares planas

En muchos casos se simplifican las fórmulas de la Geometría analítica y se facilitan los cálculos utilizando las coordenadas polares, que describimos a continuación.

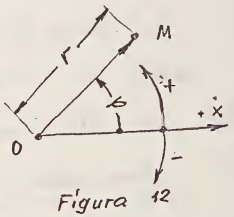

Figura 12

Imaginemos en el plano una semirrecta orientada $\overrightarrow{OX}$ de origen O. Cualquier punto M del plano queda perfectamente determinado cuando sea conocida la distancia r del mismo al origen O, y al mismo tiempo el ángulo φ que forma la dirección $\overrightarrow{OM}$ con el eje $\overrightarrow{OX}$.

A la dirección fija $\overrightarrow{OX}$ se la llama **eje polar**; al origen o punto fijo O, **polo**; al ángulo φ, **ángulo polar** o también **azimut** y al segmento r, **radio vector**.

Azimut φ y radio vector r son las coordenadas polares del punto M que se indican $M(\varphi, r)$. El ángulo φ puede ser positivo o negativo; el radio vector r es siempre positivo.

UNE A4 210 X 297

6.34 Sistema de coordenadas paralelas en el espacio

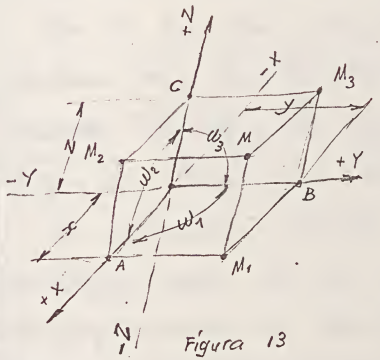

Figura 13

En lugar de los dos ejes coordenados empleados en la Geometría analítica plana (ver párrafo 6.31) se utilizan tres no coplanarios y concurrentes en un punto $\overline{O}$; los ejes se designan por las letras $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ (fig. 13) y forman entre sí ángulos $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$ y $\overline{\omega_3}$ cualesquiera. Cada dos ejes forman un plano, por lo que el espacio quedará dividido por ellos en ocho regiones distintas y designables entre sí, llamados "octantes". Los tres planos se llaman "planos coordenados" y se designan por las letras de los dos ejes que los forman; así tendremos los planos $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ y $\overline{ZX}$.

Para fijar la posición de un punto cualquiera $\overline{M}$ del espacio, lo proyectaremos sobre los tres ejes $\overline{X, Y, Z}$, mediante planos paralelos a dos de dichos ejes. De esta forma el punto $\overline{A}$ se obtendrá como intersección con el eje $\overline{X}$ del plano que pasando por $\overline{M}$ es paralelo al plano $\overline{YZ}$; el $\overline{B}$ de la misma forma siendo el plano paralelo a $\overline{ZX}$ y el $\overline{C}$ paralelo al $\overline{XY}$.

Los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, son las "coordenadas paralelas" (oblicuas) del punto $\overline{M}$, y se los designan

UNE A4 210 X 297

por las letras x, y, z, respectivamente.

Con los tres planos proyectantes se forman también las proyecciones M_1, M_2, M_3 del punto M sobre los tres planos coordenados XY, ZX e YZ respectivamente, verificándose que $MM_1 = z$; $MM_2 = y$; $MM_3 = x$

Las coordenadas paralelas oblicuas se utilizan en muy limitados casos. Son de mucha más aplicación, por las simplificaciones a que dan lugar, las coordenadas cartesianas, que describimos a continuación.

6.35 Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio

Al igual que el sistema cartesiano plano (ver párrafo 6.32), el del espacio puede considerarse como un caso particular del sistema de coordenadas paralelo (oblicuo), en el que los ángulos w_1, w_2, w_3 son todos rectos. (fig. 14).

Conservando la nomenclatura y conceptos expuestos en el anterior párrafo 6.34, podemos deducir lo siguiente:

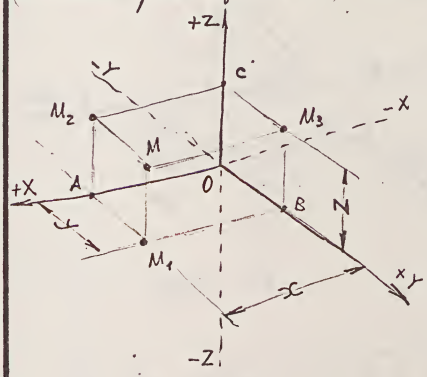

Figura 14

a) los ejes coordenados X, Y, Z, de origen O, forman en el espacio un triedro trirrectángulo.

b) los planos XY, YZ, ZX, formados por dos ejes, son mutuamente perpendiculares, y dividen al espa-

UNE A4 210 X 297

ció en ocho regiones distintas pero iguales entre sí, llamadas octantes.

c) Los planos proyectantes de M son perpendiculares a los ejes X, Y, Z y a los planos de proyección XY, YZ, ZX, por lo que las proyecciones M_1, M_2 y M_3 son ortogonales.

d) La distancia del punto M a un plano coordenado (p. e. XY) viene medida por la coordenada del tercer eje (Z); así pues se verifica que la distancia de M al plano XY es la coordenada z, ya que $MM_1 = OC = z$, e igualmente $MM_2 = OB = y$; $MM_3 = OA = x$.

6.36 Sistema de coordenadas polares en el espacio

La situación de un punto M del espacio con relación a tres ejes rectangulares puede definirse también por las siguientes magnitudes (fig. 15):

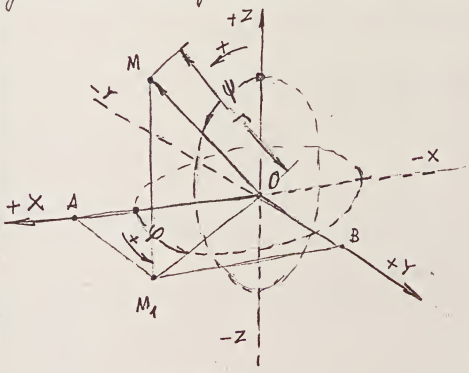

Figura 15

El radio vector OM o distancia r entre el punto M y el origen O; el ángulo Ψ que forma este radio vector con el eje Z, y el ángulo φ que forma con el eje X la proyección OM_1 del radio vector OM sobre el plano XY.

Los tres valores φ, Ψ y r se llaman las coordenadas

UNE A4 210 X 297

Págs.

31 al 40

polares del punto $\widehat{M}$, que se representa por $M(\varphi/\psi/r)$.

$\widehat{O}$ es el polo; $\widehat{OX}$ el eje polar; $\widehat{OZ}$ el eje del polo. φ y ψ se miden en radianes y van afectados de signo cuyo sentido positivo se indica en la figura 15. Para determinar cualquier punto del espacio puede variar φ de $\widehat{O}$ a 2π y ψ tan sólo de $\widehat{O}$ a π; el radio vector r es siempre positivo. (de $\widehat{O}$ a $\widehat{M}$).

Las coordenadas polares sirven también para determinar puntos sobre la superficie de la tierra en cuyo caso se las llaman coordenadas geográficas. Como en este caso de aplicación se supone constante el radio de la tierra, sólo se necesitan dos ángulos, el horizontal o longitud y el vertical o colatitud (suele tomarse en lugar de éste el complemento llamado latitud o distancia al ecuador). Las longitudes se refieren a un meridiano fijo (meridiano de Greenwich).

7. Estudio comparativo de los métodos empleados en la representación de figuras geométricas espaciales y de objetos objetos físicos de carácter técnico - industrial

7-1 Representación en la geometría métrico - proyectiva

Según hemos indicado en el párrafo 2, la geometría (métrico - proyectiva) estudia las propiedades métricas y gráficas de las figuras geométricas planas y espaciales. Para estas últimas se vale exclusivamente de la representación en perspectiva axonométrica de dichas figuras, método adecua-

UNE A4 210 X 297

do a dicho estudio, ya que con la perspectiva suele adquirirse con rapidez y claridad el concepto de la forma que tiene en el espacio la figura que se estudia.

Las relaciones métricas se deducen siempre de forma analítica mediante razonamientos y cálculos algébricos elementales. La figura de representación es simplemente un elemento auxiliar que facilita y guía el razonamiento y cálculo respectivo.

No debe olvidarse que la perspectiva axonométrica es uno de los varios métodos de representación de figuras espaciales que, mediante construcciones geométricas adecuadas permite obtener gráficamente verdaderas magnitudes lineales o angulares, siempre que se incluyan, juntamente con la perspectiva del objeto, la de sus proyecciones sobre un triedro trirectángulo. No obstante esta posibilidad, la geometría métrico-proyectiva no hace uso de ella y se limita tan solo a utilizar dicha perspectiva como medio de expresión gráfica, tratando de suplir con el razonamiento las posibles dificultades que suelen surgir por las deformaciones lineales o angulares que presenta este sistema de representación.

En resumen, la geometría métrico-proyectiva opera en el estudio de propiedades de figuras geométricas espaciales, [illegible] con una representación gráfica en perspec-

10-7-71

UNE A4 210 X 297

tiva destinada exclusivamente a aclaración de sus formas, y deduce de ella mediante razonamientos geométricos apropiados, las propiedades de posición o de magnitud de las mismas.

7.2 Representación en el sistema diédrico

El sistema diédrico de representación de figuras geométricas espaciales o de cuerpos físicos, opera exclusivamente con las proyecciones ortogonales de los puntos, aristas, ejes, etc. de las superficies de contorno de dichos cuerpos y figuras sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí. En casos especiales puede utilizarse también un tercer plano de proyección perpendicular a los anteriores. Es un sistema de representación fundamentalmente gráfico.

7.3 Representación en la Geometría analítica

La Geometría analítica estudia las relaciones geométricas y teoremas de las figuras del espacio, haciendo uso exclusivamente del cálculo algebraico puro, y estableciendo relaciones analíticas entre las coordenadas que determinan las posiciones de sus puntos con respecto a elementos fijos en el espacio (ejes coordenados).

Para facilitar el razonamiento analítico utiliza, al igual que la Geometría métrica, la representación en perspectiva axonométrica de sus figuras, con las mismas limitaciones expuestas en el párrafo 7.1

UNE A4 210 X 297

El sistema de coordenadas cartesianas en el espacio toma como ejes coordenados tres rectas orientadas que forman las aristas de un triedro trirrectángulo. Estos ejes determinan dos a dos, tres planos coordenados equivalentes a los tres empleados en el sistema diédrico (vertical, horizontal y perfil).

7.4 Representación en el Dibujo técnico

El dibujo técnico utiliza como medio de expresión más adecuado, el sistema de vistas en distintas direcciones del objeto a representar. En esencia, la vista de un objeto en una dirección determinada, en el que el observador se supone suficientemente alejado de la pieza para que las distintas visuales sean sensiblemente paralelas (teóricamente es una proyección paralela con punto de vista en el infinito), no es más que la proyección ortogonal de dicho objeto sobre un plano perpendicular a la dirección de la visual y situado detrás del mismo.

El criterio de economía en el tiempo de ejecución de un dibujo técnico, sin perjuicio de la claridad, admite un número variable en las direcciones de la visual y número de vistas a representar que oscilan de una como mínimo a seis como máximo. Las vistas de un dibujo están normalizadas tanto en sus direcciones como en su posición relativa en dicho dibujo.

12-7-71

UNE A4 210 X 297

Las direcciones normalizadas son las seis posibles perpendiculares a las caras de un cubo (fig. 16), en cuyo interior se supone colocado el objeto a representar en su posición de empleo (vertical, horizontal o inclinado).

(Ficha 57 fig. 3)

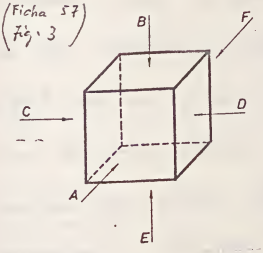

Figura 16

Los nombres técnicos que reciben estas vistas están dados de acuerdo con la dirección de la visual o posición relativa del observador con respecto al objeto.

Tomando p.e. como objeto de representación el de la figura 17, dichas vistas se denominan de la siguiente manera:

Ficha 57 fig. 2

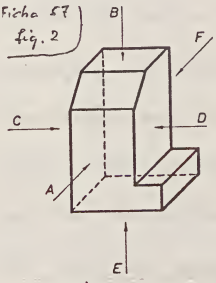

Figura 17

A) Vista anterior o principal (el observador se sitúa delante del objeto)

B) Vista superior (el observador, encima de la principal)

C) Vista lateral izquierda (el observador, a la izquierda)

D) Vista lateral derecha (el observador, a la derecha)

E) Vista inferior (el observador, debajo)

F) Vista posterior (el observador, detrás).

La colocación de estas vistas en el plano del dibujo no es arbitraria, sino que por el contrario, está normalizada.

Existen dos sistemas esencialmente distintos, denomi-

UNE A4 210 X 297

UNE A4 210 X 297

nados respectivamente Sistema europeo y Sistema americano. En ambos se elige previamente la dirección de la vista anterior que se considera como básica para la colocación de las restantes vistas, de forma tal que estando situado el objeto en su posición de empleo, se obtenga una representación lo más clara posible; por esta razón, a dicha vista inicial de libre elección, se la denomina también vista principal. Fijada la vista principal, las restantes vistas tienen una posición determinada en el dibujo, con respecto a aquélla.

(fig. 4 y 5, ficha 59)

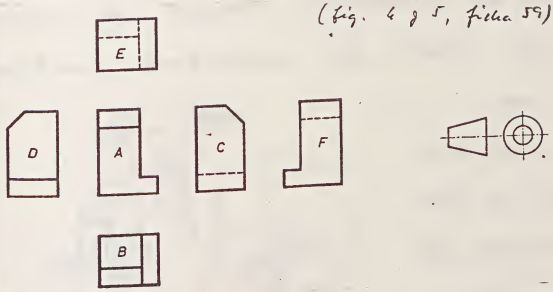

Figura 18

En el sistema europeo, se colocan las vistas en la posición que se indica en la figura 18 la cual se corresponde con la pieza y direcciones dadas en la figura 17. El símbolo distintivo de este sistema es el dibujado a la derecha de la figura.

(fig. 6 y 7, ficha 59)

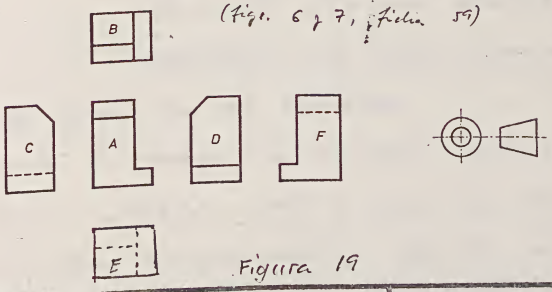

Figura 19

La dirección y colocación de las mismas vistas en el sistema americano se indican en la

figura 19, cuyo símbolo distintivo aparece también a la derecha de la misma.

Como puede observarse comparando las figuras 18 y 19, la colocación en ambos sistemas de las vistas $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ y $\hat{E}$ con respecto a la principal $\hat{A}$ es totalmente opuesta, lo cual obliga a un notable esfuerzo mental al pasar de un sistema a otro. En nuestro estudio aplicaremos exclusivamente el sistema europeo que es el empleado en España. Aprovechamos la ocasión para indicar que el sistema diédrico de proyecciones en los países anglosajones sigue las mismas directrices de representación que el sistema americano de dibujo técnico.

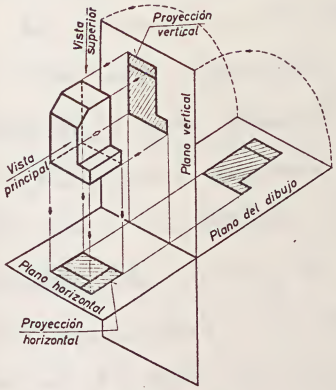

Figura 20

La vista principal o anterior del sistema europeo, equivale en el sistema diédrico a la proyección vertical (fig. 20); análogamente, la superior es equivalente a la horizontal. Si se necesitase una nueva vista en la dirección lateral izquierda, ésta sería equivalente a la vista de perfil en el diédrico.

En el dibujo técnico los cuerpos se suponen siempre situados en el primer diedro, por lo que la vista superior aparece situada siempre debajo de la prin-

cipal y la lateral izquierda a la derecha de la misma. Ello establece una clara correspondencia entre el sistema diédrico y el dibujo técnico.

Tanto en la representación diédrica como en el dibujo técnico son necesarias, al menos, dos proyecciones o vistas para poder determinar con precisión las figuras espaciales o cuerpos físicos. No obstante el dibujo técnico, consigue en casos especiales, la representación correcta de un objeto con una sola vista, supliendo con indicaciones escritas (consignación de un espesor constante), o con símbolos adecuados (signos de cuadrado, diámetro, cruz de San Andrés, etc) la supresión de una de ellas.

Son corrientes en el dibujo técnico las representaciones en dos vistas (principal y superior, o principal y lateral izquierda); más frecuente aún es el empleo de tres vistas (principal, superior y lateral izquierda), pues de esta forma se obtiene imaginariamente con claridad y rapidez, las nociones de forma y dimensiones del objeto representado. Los casos de representación de objetos con más de tres vistas son excepcionales en el dibujo técnico y sólo se utilizan en piezas complicadas. Por el contrario son frecuentes las representaciones en cortes o secciones en piezas que presentan interiores huecos más o menos complicados; el número de cortes o secciones no está limitado y se eligen los necesarios según criterios de

UNE A4 210 X 297

claridad y exactitud.

Dado el carácter práctico del sistema de representación del dibujo técnico, en oposición al teórico del sistema diédrico, no tiene importancia en el primero la posición relativa del objeto con respecto a los planos de proyección (vertical, horizontal y de perfil en el sistema diédrico), por lo que se prescinde en el dibujo técnico de la representación de la línea de tierra y de las trazas del plano de perfil (ejes coordenados de la Geometría analítica), tan necesarios para la situación de puntos por sus respectivas coordenadas en la solución de problemas geométricos espaciales. De todas formas siempre se pueden situar dichos ejes (si fuese necesario) después de colocadas arbitrariamente las vistas del objeto en el plano.

8. Nomenclatura adoptada en vista a una coordinación de la empleada en la Geometría métrico-proyectiva, la Geometría descriptiva en su sistema diédrico, la Geometría analítica y el Dibujo técnico, referentes todas a figuras espaciales.

En el estudio que hacemos a continuación, proponemos una nomenclatura común que tiene posibles aplicaciones a los distintos casos que a continuación exponemos.

8.1. Caso de aplicación de la nomenclatura propuesta

A) En figuras en perspectiva axonométrica empleadas como medios gráficos de expresión en la Geometría métrico - descriptiva.

B) En figuras en perspectiva axonométrica empleadas como medios gráficos de expresión en la Geometría analítica.

C) En figuras en proyecciones diédricas empleadas como medios gráficos de expresión en la Geometría analítica.

D) En figuras en proyecciones del Sistema diédrico.

E) En la representación por medio de vistas y cortes en el Dibujo técnico.

F) Como forma abreviada de expresión en libros e impresos técnicos.

8.2 Nomenclatura conjunta para figuras del espacio (ambito espacio) y en proyección.

8.21 Nomenclatura para el "Punto origen de coordenadas"

En dibujo se designa con la cifra cero.

En impresos se expresa: Origen O.

Se aplica en los casos B), C), D), F). (ver párrafo 8.1).

No se aplica en los casos A), E). ← (ver párrafo 8.1).

8.22 Nomenclatura para los "Ejes coordenados"

En dibujo se designan con las letras mayúsculas latinas +X, +Y, +Z.

En impresos se expresan:

1) En general Eje X, Eje Y, Eje Z.

Págs.

41 al 50

UNE A4 210 X 297

2) En particular, si fuese necesario puntualizar el sentido:

Eje +X } Eje +Y } Eje +Z }
Eje -X } Eje -Y } Eje -Z }

Se aplica en los casos B), C), D), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), E) ← (ver párrafo 8.1).

8.23 Nomenclatura para los "Planos coordenados"

En dibujos se designan con los siguientes números romanos:

1) El formado por los ejes Z y X, el número I
2) El formado por los ejes X e Y, el número II
3) El formado por los ejes Y y Z, el número III

En impresos se expresan: Plano I, Plano II, Plano III
o si se quiere mas precisión: Plano coordenado I, etc.

Se aplica en los casos B), C), D) F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), E) ← (ver párrafo 8.1).

8.24 Nomenclatura para un "Punto en el espacio"

En dibujos se designa con una cifra, excepto el cero
En impresos se expresa p.e.: Punto 12.

Se aplica en los casos A), B) F). (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E). (ver párrafo 8.1).

8.25 Nomenclatura para una "Recta en el espacio"

1) Recta indefinida

En dibujos se designa con una letra minúscula latina, exceptuando las x, y, z.

En impresos se expresa p. e. Recta m

Se aplica en los casos A), B), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E) (ver párrafo 8.1).

2) Segmento rectilíneo definido por sus puntos extremos.

En dibujos se designan adecuadamente las cifras de sus puntos extremos: p. e. 8 y 15.

En impresos se expresa p. ej. Segmento 8·15, y si se quiere mayor precisión, Segmento rectilíneo 8·15.

Se aplica en los casos A), B), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E) (ver párrafo 8.1).

3) Segmento rectilíneo acotado

En dibujos se designa con una letra minúscula latina (como 1), exceptuando las x, y, z. y se acota, según normas del Dibujo técnico, con línea de cota, flechas y, si fuere necesario, con líneas de referencia.

UNE A4 210 X 297

En impreso se expresa p. e. : Segmento h.

Se aplica en los casos A), B), C), D) E) F) (ver párrafo 8.1).

Observación.- En el Dibujo técnico se emplea casi exclusivamente la acotación de segmentos rectilíneos (dimensiones longitudinales de los objetos representados) mediante cotas, flechas, líneas de referencia si ha lugar, y cifras de cota; estas últimas expresan la medida de la longitud real del segmento de acuerdo con la unidad adoptada.

8.25 Nomenclatura para un "Plano en el espacio".

En dibujos se designa el plano por una letra mayúscula latina, exceptuando las X, Y, Z.

En impresos se expresa p. e. Plano R.

Se aplica en los casos A), B), F). (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos C), D), E) (ver párrafo 8.1).

8.26 Nomenclatura para las "Coordenadas cartesianas".

En dibujos se designan con las letras minúsculas latinas x, y, z. No es frecuente la representación gráfica de las coordenadas cartesianas de los puntos de la figura, y sólo se emplea en casos excepcionales para destacar la posición de un punto notable; cuando esto suceda, las coordenadas se representan como segmentos acotados, bien

... letras respectivas o con sus dimensiones reales fija-... con cifras de acuerdo con la unidad adoptada.

... impresos se expresan: "Coordenada xc", "Coordenada y, "Coordenada z", o también simplemente "Coordenadas x, y, z". ...eden sustituirse las letras anteriores por sus valores nu-...ricos.

...e aplican en los casos "B), C), D) F)" (ver párrafo 8.1).
...o se aplican en los casos "A), E)" (ver párrafo 8.1).

13 Nomenclatura especial para figuras en proyección

En el sistema diédrico, en el Dibujo técnico y excepcionalmente en la geometría analítica, se opera exclusivamente con las proyecciones de figuras espaciales sobre dos o tres planos de proyección. Esto precisa establecer una nomenclatura que permita distinguir claramente las distintas proyecciones de los elementos de la figura estudiada (puntos, rectas, ángulos, etc.). La nomenclatura adoptada tiene en cuenta estas condiciones y permite localizar independientemente dichas proyecciones efectuadas sobre los dos o tres planos coordenados.

No obstante, cuando el objeto o figura a representar se suponga colocado en el primer cuadrante (si se emplean dos planos coordenados), o en el primer octante

Figura 21

(si son tres los planos coordenados), las proyecciones de la figura quedan netamente diferenciadas en zonas fijas e independientes del plano del dibujo (fig. 21), lo cual permite una fácil localización de las mismas debido a su especial disposición.

Por los motivos expuestos, consideramos posición normal de la figura, y de más frecuente empleo, la indicada anteriormente (primer cuadrante o primer octante) y como excepcionales las restantes posiciones (2º a 4º cuadrantes, o 2º a 8º octantes). Bajo este punto de vista y con el criterio de economía en el tiempo de ejecución, adoptamos una nomenclatura simplificada para el caso normal y otra más especificada para los restantes casos más generales pero de menor aplicación. Las simplificaciones de la nomenclatura normal se derivan de la específica general.

8.31 Nomenclatura para un "Punto en proyecciones"

En dicho se designa:

a) En posición normal, con una misma cifra en sus dos o tres proyecciones que se corresponden debidamente por sus líneas de referencia perpendiculares a los ejes.

b) En posición general, con una misma cifra precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta; p. e. I (23), II (23), III (23).

Con esta nomenclatura se especifican las proyecciones del punto 23 (en el espacio) sobre el plano vertical (I), horizontal (II) o de perfil (III). Cuando son solo dos los planos de proyección, se prescinde de la última.

En impresos se expresa siempre igual que b).

Se aplica en los casos C), D) F) y excepcionalmente en E). (ver párrafo 8.1)

No se aplica en A), B) y tampoco, en general, en E) (ver párrafo 8.1).

8.32 Nomenclatura para una "Recta en proyecciones"

1) Recta indefinida

En los dibujos se designa:

a) En posición normal, con una misma letra minúscula latina, exceptuando las x, y, z, en sus dos o tres proyecciones.

b) En posición general, con una misma letra minúscula latina, exceptuando las x, y, z, precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta: p. e. I (c), II (c), III (c).

En impresos se expresa siempre igual que b).
Se aplica en los casos C), D) F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), B), E), (ver párrafo 8.1)

2) Segmento rectilíneo definido por sus puntos extremos.

En dibujo, se designa:

a) En posición normal, con una misma cifra en las tres proyecciones de un extremo, y otra distinta en las tres proyecciones del otro; p. e. 7 · 11

b) En posición general, igual a la anterior precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta.
En el ejemplo anterior, el punto 7 del segmento 7 · 11 en el espacio, se designará en el dibujo por I (7), II (7) y III (7) según la proyección, e igual para el punto 11.

En impresos se expresa: Segmento I (7 · 11), Segmento II (7 · 11), y Segmento III (7 · 11), según (se trate de) la proyección vertical, horizontal o de perfil respectivamente.
Se aplica en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

3) Segmento rectilíneo acotado

En dibujo, se designa:

a) En posición normal, con una misma letra minúscula latina (como 1), exceptuando las x, y, z, en sus dos o tres proyecciones. Al mismo tiempo se acota, según normas del Dibujo técnico, con línea de cota, flechas y, si fuese necesario, con líneas de referencia.

b) En posición general, igual que la anterior, precedida del número romano del plano sobre el que se proyecta:

UNE A4 210 X 297

p. e. I(m), II(m), III(m).

En impresos se expresa siempre igual que b).

Se aplica en los casos C), D), F) ← (ver párrafo 8.1).
No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).
Observación.- En el Dibujo técnico se emplea casi exclusivamente la acotación de segmentos rectilíneos por medio de cifras que expresan la medida de la longitud real del segmento de acuerdo con la unidad adoptada.

8.33 Nomenclatura para un "Plano en proyecciones"

Ante la imposibilidad material de representar el plano por las proyecciones de todos sus infinitos puntos, se establece la posición de un plano cualquiera mediante las proyecciones de los elementos que determinan dicho plano en el espacio, que según hemos indicado anteriormente (ver párrafo 6.13) son los siguientes: 1) Tres puntos no alineados; 2) dos rectas secantes o paralelas, y 3) Una recta y un punto exterior a ella. Como estos elementos son puntos o rectas, y ya hemos establecido anteriormente la designación de ellos en los dibujos, sigue conservándose la misma para la del plano que determinan.

En el lenguaje oral se expresa p. e. Plano G que pasa por los puntos 8.15.16, o por las rectas a.f o por la recta m y el punto 11.

En impresos se expresa p. e. G(8.15.16), G(a.f) ó

UNE A4 210 X 297

G (m·11) para el plano en el espacio, y en proyecciones

II. G(8·15·16) que se leerá proyección horizontal del plano G que pasa por los puntos 8, 15 y 16 del espacio; si no es necesario puede suprimirse la letra característica G.

Análogamente emplearemos III. G(a·f) para dos rectas secantes (o paralelas) (más simple también III (a·f), y I. G(m·11) (o I. (m-11), para recta y punto

Se aplica en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1)

No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

8.34 Nomenclatura para las "Trasas de una recta"

Recordemos que se denomina Trasa de una recta en el espacio al punto de intersección de la misma con uno de los planos de proyección.

La determinación de las trasas de una recta permite resolver muchos problemas del espacio, y ocupa un lugar destacado en el lenguaje y aplicación del Sistema diédrico de representación.

Si se emplean dos planos coordenados, las trasas de una recta pueden ser: Dos (recta oblicua a los dos planos coordenados); Una (recta paralela a uno y no paralela al otro); Ninguna (recta paralela a los dos).

Si se emplean tres planos coordenados, las trasas de una recta cualquiera pueden ser: Tres (recta oblicua a los

UNE A4 210 X 297

tres planos coordenados); Dos (paralela a uno de los planos y oblicua a los otros dos); Una (paralela a dos planos).

Las trazas de una recta cualquiera se consideran en muchos casos como puntos notables del trazado. Pueden designarse en general con una cifra cualquiera; a ser posible deben reservarse preferentemente la cifra 1, para la traza vertical; la 2 para la horizontal, y la 3. para la de perfil. En sus proyecciones se sigue el criterio general de designación de puntos (ver párrafo 8.31).

En impresos puede puntualizarse más haciendo referencia a la recta que produce las trazas, y así p.e. escribiremos II (1.d) que representa la proyección horizontal (II) de la traza vertical (1) de la recta d, o también II (1.(6.7)) cuando la recta esté designada por dos de sus puntos (6 y 7).

Se aplica en los casos C), D, F) (ver párrafo 8.1)
No se aplica en los casos A), B), E (ver párrafo 8.1)

8.35 Nomenclatura para las "Trazas del plano"

Se denomina traza de un plano en el espacio a la recta intersección de dicho plano con uno de los planos de proyección.

Las trazas del plano, al igual que las de las rectas, (en el sistema diédrico) permite permite resolver numerosos problemas del espacio y sirven con mucha frecuencia para fijar la posición del plano con respecto a los coordenados.

Si se emplean dos planos coordenados, las trazas de

Págs.

51 al 60

EUITIS
BIBLIOTECA

un plano pueden ser: Dos rectas que se cortan en la línea de tierra, o paralelas a ésta (plano oblicuo a los dos de proyección); Dos rectas que se cortan en la línea de tierra perpendiculares a ésta (plano perpendicular a los dos); Una recta paralela a la línea de tierra (plano paralelo a uno de ellos); La misma línea de tierra (plano que pase por ella)

Si se emplean tres planos coordenados, las trazas de un plano pueden ser: Tres rectas secantes dos a dos (plano oblicuo a los tres de proyección; Dos rectas paralelas a uno de los ejes coordenados y una tercera perpendicular a ambas (plano oblicuo a dos de los de proyección y perpendicular al tercero); Dos rectas secantes perpendiculares a uno de los ejes (plano paralelo al formado por los otras dos); Uno de los ejes coordenados y otra recta perpendicular a éste (plano que pase por dicho eje).

Las trazas de un plano cualquiera se consideran en muchos casos como rectas notables del trazado. Pueden designarse en general con una letra minúscula latina cualquiera; a ser posible deben reservarse preferentemente la letra a para la traza vertical; la b para la horizontal, y la c para la de perfil. En sus proyecciones se sigue el criterio general de designación de rectas indefinidas (ver párrafo 8.32).

En impresos puede puntualizarse más haciendo referencia al plano que produce las trazas, y así p.e. es-

UNE A4 210 X 297

cribiremos $\overset{\frown}{\text{II}}(a-M)$ que representa la proyección horizontal (II) de la traza vertical (a) del plano M, o también $\text{II}(a-(4\text{-}5\text{-}6))$ cuando el plano sea el que pase por los tres puntos 4, 5 y 6.

Se aplica en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1)

No se aplica en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1).

8.36 Nomenclatura para un "ángulo en proyección"

En dibujos en proyecciones se emplea casi exclusivamente la designación de un ángulo mediante un arco acotado (con flechas) y una letra minúscula griega, que se repite en las dos o tres proyecciones, sin indicación expresa del plano sobre el que se proyecta (posición normal) o precedida del número romano correspondiente (posición general). Así consignaremos p. e. $\overset{\frown}{\text{II}}(\beta)$, que representa la proyección horizontal del ángulo β.

En impresos se expresa de forma más general $\overset{\frown}{\text{II}}(\beta)$, $\overset{\frown}{\text{II}}(ab)$, $\overset{\frown}{\text{II}}(AOB)$, según que el ángulo esté acotado (β), definido por dos rectas (ab), o por un punto en cada recta y el vértice (AOB), de acuerdo con la designación dada en el párrafo 6.14.

Se emplea en los casos C), D), F) (ver párrafo 8.1)

No se emplea en los casos A), B), E) (ver párrafo 8.1)

UNE A4 210 X 297

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

Capítulo II

Estudio conjunto del cálculo analítico de las principales magnitudes de los poliedros regulares convexos, de su representación gráfica directa en el Sistema diédrico y de su representación gráfico-analítica como aplicación del cálculo analítico

9. Generalidades

Recordemos las siguientes definiciones estudiadas en la Geometría.

Se da el nombre de poliedro en general, a un sólido o cuerpo geométrico limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenezcan al mismo plano.

Los polígonos del conjunto se llaman caras del poliedro, los lados y vértices de sus caras, se llaman aristas y vértices del poliedro y los ángulos internos de las caras, ángulos planos del mismo. Los planos de dos caras contiguas forman un ángulo diedro que recibe el nombre de diedro del poliedro

En cada vértice del poliedro concurren varias aristas y

UNE A4 210 X 297

caras del mismo, formando su conjunto una figura geométrica denominada ángulo sólido del poliedro.

Diagonales de un poliedro son rectas que unen dos vértices no situados en la misma cara, y plano diagonal el que pasa por un vértice y una arista, o por dos aristas, sin que en ambos casos estos elementos pertenezcan a una misma cara.

Un poliedro se llama convexo si al prolongar cualquiera de sus caras queda todo él en la misma región del espacio en que queda dividido por el plano de dicha cara.

Finalmente, un poliedro se llama regular, cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales, lo que implica la igualdad de sus aristas y ángulos sólidos del mismo.

Las definiciones anteriores limitan la existencia de poliedros regulares convexos al número de cinco, ya que solo puede existir un ángulo sólido siempre y cuando la suma de los ángulos de las caras que lo forman sea menor que cuatro rectos.

Esta condición solo la cumplen:

1) Tres triángulos equiláteros.- Tetraedro regular
2) Cuatro triángulos equiláteros.- Octaedro regular
3) Cinco triángulos equiláteros.- Icosaedro regular
4) Tres cuadrados.- Exaedro regular o cubo

UNE A4 210 X 297

5) Tres pentágonos regulares. - Dodecaedro regular.

9.1 Deducción de fórmulas generales a aplicar en el cálculo de magnitudes fundamentales comunes a los cinco poliedros regulares.

Consideremos como dato único y básico, para el cálculo de magnitudes lineales en los cinco poliedros regulares, la longitud $\widehat{a_n}$ de la arista de cada poliedro.

Las fórmulas generales que vamos a deducir en función de la arista $\widehat{l}$ del poliedro, se refieren a las siguientes magnitudes:

1) Radio $\widehat{a}$ de la esfera circunscrita $\left(r^n_{ec}\right)$ (r_1)

2) Radio $\widehat{b}$ de la esfera tangente a las aristas $\left(r^n_{et}\right)$ (r_3)

3) Radio $\widehat{c}$ de la esfera inscrita $\left(r^n_{ei}\right)$ (r_2)

4) Ángulo $\widehat{2\varphi}$ del diedro formado por dos caras contiguas.

En dichas fórmulas intervienen particularmente para cada poliedro, las siguientes magnitudes:

5) Radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara r^n_{cc} (r_4)

6) Radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita al polígono regular obtenido al unir los extremos de las aristas concurrentes en un vértice. r_{cm} (r_5)

Para el cálculo de estos elementos consideremos un

UNE A4 210 X 297

ángulo sólido de cualquier poliedro regular, en cuyo vértice concurrirán tantas aristas como caras lo formen, pudiendo ser éstas tan sólo triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares.

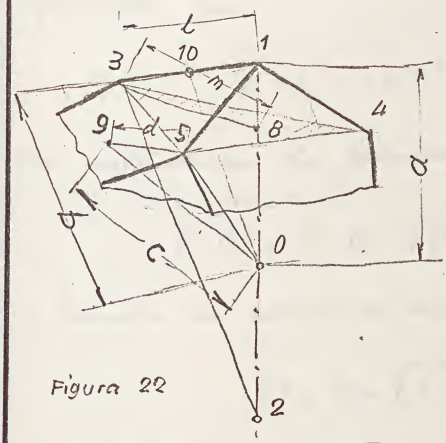

Figura 22

Sea (fig. 22) $\widehat{1}$ el vértice de dicho ángulo sólido, y $\overline{3, 4, \ldots}$ los vértices contiguos, que formarán un polígono regular de tantos lados como sean las caras concurrentes (tres, cuatro o cinco). La pirámide $\overline{1\text{-}3\cdot4\cdot5\ldots}$ será pues regular, y su altura $\overline{1\cdot8}$ pasará por el centro $\overline{0}$ de la esfera circunscrita.

Consideremos también el punto $\widehat{9}$, centro de una cara, y el $\widehat{10}$, centro de una arista.

En la figura se acotan los segmentos

$$(0\cdot1)=a \quad (0\cdot10)=b \quad (0\cdot9)=c \quad (5\cdot9)=d \quad (3\cdot8)=m \quad (3\cdot1)=l$$

Si $\widehat{2}$, punto simétrico de $\widehat{1}$ con respecto a $\widehat{0}$, lo unimos con $\widehat{3}$, el triángulo $\overline{(1\cdot2\cdot3)}$ será rectángulo en $\widehat{3}$, por ser el segmento $\overline{(1\cdot2)}$ diámetro de la esfera circunscrita al poliedro; por otra parte se verifica que $\overline{(1\cdot8)}$ es la proyección de $\overline{(3\cdot1)}$ sobre $\overline{(1\cdot2)}$. Por con-

UNE A4 210 X 297

siguiente, tendremos que

$$(3\cdot 1)^2 = (1\cdot 2)\times(1\cdot 8)$$

El triángulo $(3\cdot 8\cdot 1)$ también es rectángulo en $\widehat{8}$, verificándose que

$$(1\cdot 8)^2 = (3\cdot 1)^2 - (3\cdot 8)^2$$

que sustituído en la primera, nos da

$$(3\cdot 1)^2 = (1\cdot 2)\times\sqrt{(3\cdot 1)^2 - (3\cdot 8)^2}$$

teniendo en cuenta las cotas de la figura, tendremos

$$l^2 = 2a\sqrt{l^2 - m^2}$$

y despejando $\widehat{a}$

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} \qquad [1]$$

Si unimos el centro $\widehat{9}$ de una cara con uno de los vértices $\widehat{5}$ (fig. 22), y éste con $\widehat{0}$, el triángulo $(5\cdot 9\cdot 0)$ formado, será rectángulo en $\widehat{9}$, por lo que tendremos:

$$(0\cdot 9) = \sqrt{(0\cdot 5)^2 - (5\cdot 9)^2}$$

o sea

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} \qquad [2]$$

UNE A4 210 X 297

Si unimos finalmente el centro $\widehat{10}$ de una arista, con $\widehat{0}$, el triángulo $\widehat{(0\cdot 10\cdot 1)}$ será rectángulo en $\widehat{10}$, por lo que

$$\widehat{(0\cdot 10)} = \sqrt{\widehat{(0\cdot 1)}^2 - \widehat{(10\cdot 1)}^2}$$

o sea

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} \qquad [3]$$

Con auxilio de las fórmulas (1), (2), (3), y calculando (previamente) para cada poliedro regular los valores de $\widehat{d}$ y $\widehat{m}$, pueden hallarse en cada caso los de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, y $\widehat{c}$.

Para el cálculo del diedro $\widehat{2\varphi}$ formado por dos caras contiguas, procederemos como sigue:

Consideremos (fig. 23) dos caras contiguas cuya arista común es $\widehat{(1\cdot 2)}$, siendo $\widehat{3}$ y $\widehat{4}$ los centros de las mismas.

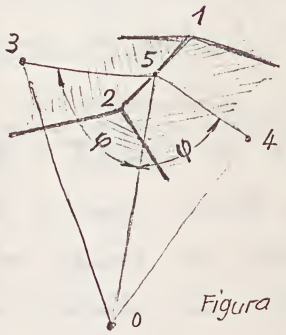

Figura 23

El plano perpendicular a $\widehat{(1\cdot 2)}$ en su punto medio $\widehat{5}$, pasará por el centro $\widehat{0}$ de la esfera circunscrita al poliedro, y también por los centros $\widehat{3}$ y $\widehat{4}$ de las dos caras contiguas.

El ángulo $\widehat{(3\cdot 5\cdot 4)}$, rectilíneo del diedro formado por dichas caras, será la medida de dicho diedro.

UNE A4 210 X 297

Si unimos $\widehat{5}$ con $\widehat{0}$, el triángulo $(3 \cdot 5 \cdot 0)$ será rectángulo en $\widehat{3}$, verificándose:

$$\operatorname{sen}(3 \cdot 5 \cdot 0) = \frac{(3 \cdot 0)}{(0 \cdot 5)}\,; \quad \text{y sustituyendo valores}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{b} \qquad [4]$$

que nos permite calcular el ángulo $\widehat{\varphi}$, y por consiguiente el ángulo $\widehat{2\varphi}$ del diedro correspondiente.

10. Tetraedro regular

El tetraedro regular se compone de cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas. Las caras son triángulos equiláteros. Una perspectiva del tetraedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 10.52, está realizada en la figura 23 [incluir perspectiva figura 23]

10.1 Representación en el Sistema diédrico del tetraedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico

La representación la efectuaremos en los planos $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$, (en el primer octante). Situaremos el tetraedro con una cara paralela a $\widehat{II}$ y una arista de ella perpendicular a $\widehat{I}$; el vértice opuesto a dicha cara lo consideramos encima de la misma. Los vértices se enumerarán del $\widehat{1}$ al $\widehat{4}$.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el tetraedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado $\widehat{l}$, que queda a libre elección.

UNE A4 210 X 297

Refiriéndonos a la figura 24 efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

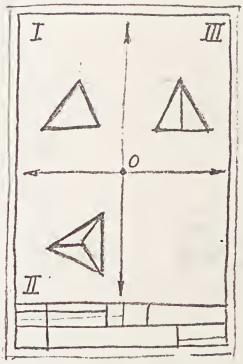

Figura 24

1º. Situar previamente los ejes coordenados $\overline{+X}$, $+Y$, $+Z$.

2º Construir en el plano $\overline{II}$ un triángulo equilátero $\overline{II(2\cdot3\cdot4)}$, de lado ℓ y de forma que el lado $\overline{II(2\cdot3)}$ sea perpendicular a $\overline{+X}$ (ver ficha P.G. 2352).

3º Trazar las alturas de dicho triángulo limitándolas en sus puntos de intersección, proyección del cuarto vértice $\overline{II(1)}$ del tetraedro.

Uniendo estos puntos en la forma representada en la figura, tendremos la proyección del tetraedro sobre $\overline{II}$.

4º Proyectar sobre $\overline{I}$ el lado $\overline{II(4\cdot2)}$ o también el $\overline{II(4\cdot3)}$ que será una recta paralela a $\overline{+X}$.

5º Con centro en $\overline{I(4)}$ y radio $\overline{\ell}$ trazar un arco.

6º Construir en $\overline{II}$ la cara $\overline{II(1\cdot2\cdot3)}$ contigua a la $\overline{II(2\cdot3\cdot4)}$ y abatida sobre el plano de ésta, determinando al mismo tiempo su centro.

7º Hacer girar en $\overline{I}$ dicha cara, alrededor de la arista común $\overline{I(2\cdot3)}$ mediante el trazado de un arco de centro $\overline{I(2)}$, hasta que corte en $\overline{I(1)}$ el (anteriormente segmento) trazado 5º. Este punto $\overline{I(1)}$ debe corresponderse con el $\overline{II(1)}$ obtenido independientemente.

Págs.

61 al 70

Las construcciones 1ª a 7ª nos dan la proyección del tetraedro sobre el plano $\widehat{II}$.

La proyección sobre $\widehat{III}$ es inmediata y se deduce de las $\widehat{I}$ y II (segmento III(3·2) = ℓ).

El centro $\widehat{O}$ del tetraedro en el plano II, se obtiene mediante la misma construcción 7ª girando el centro de la cara abatida $\widehat{I(1\cdot2\cdot3)}$, hasta obtener su proyección en $\widehat{I}$; la perpendicular a I(1·2·3) en dicho centro cortará al eje en el punto buscado $\widehat{I(O)}$.

Con las construcciones anteriores se obtiene en $\widehat{I}$ la verdadera magnitud del ángulo diedro $\widehat{2\varphi}$ del tetraedro.

10.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del tetraedro regular, en función de la arista "ℓ" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

10.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al tetraedro regular, en función de la arista "ℓ."

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él tres triángulos equiláteros de lado $\widehat{\ell}$ y tres aristas también iguales a $\widehat{\ell}$, cuyos extremos forman a su vez un triángulo equilátero de lado $\widehat{\ell}$.

El radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita a este último triángulo equilátero, en función de su lado, valdrá

UNE A4 210 X 297

según se deduce en la Geometría métrica

$$m = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

valor que sustituido en [1] (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l = 0,61\ 23\ 72 \ldots l \quad [5]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{3l^2}{9}}} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{6l^2}{9}}} =$$

$$= \frac{l^2}{\frac{2l}{3}\sqrt{6}} = \frac{3l}{2\sqrt{6}} = \frac{3l\sqrt{6}}{12} = \boxed{\frac{l\sqrt{6}}{4} = a} = [1,\ 1.1.1.2]\,l$$

10.22 Cálculo del radio "6" de la esfera tangente a las aristas del tetraedro regular, en función de su arista "l".

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [5] del párrafo 10,21, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l = 0,\ 35\ 35\ 53 \ldots l \quad [6]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{16}\, l^2 - \frac{l^2}{4}} = l\sqrt{\frac{6}{16} - \frac{1}{4}} = l\sqrt{\frac{24 - 16}{64}} =$$

UNE A4 210 X 297

$$= l\sqrt{\frac{8}{64}} = l\,\frac{\sqrt{8}}{8} = l\,\frac{2\sqrt{2}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\,l = b} = [2,\widehat{1.4}]\,l$$

10.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el tetraedro regular, en función de su arista "l".

Para ello calculemos previamente el radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a una cara, que siendo un triángulo equilátero valdrá:

$$\overline{d = \frac{\sqrt{3}}{3}\,l = 0.57\ 73\ 50\ldots\ l = [1,\widehat{1,2}]\,l\ [7]}$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el $\widehat{a}$ del párrafo 10.21

$$\overline{c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{12}\,l = 0,20\ 41\ 24\ldots l}\quad [8]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\,l\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{16}\,l^2 - \frac{3}{9}\,l^2} = l\sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{3}} = l\sqrt{\frac{9-8}{24}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\,l = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{12}\,l = c} = [4,\widehat{1,8}]\,l$$

10.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del tetraedro regular.

Para el cálculo del diedro "2φ" formado por dos ca-

UNE A4 210 X 297

ras contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$ obtenidas en 10.22. y 10.23 respectivamente

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{6}}{12}\,l : \frac{\sqrt{2}}{4}\,l = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\ 73\ 50\ldots$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{12}\,l : \frac{\sqrt{2}}{4}\,l = \frac{4\sqrt{6}}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57\ 73\ 50\ldots = (1,\ \widehat{1,\ 2})$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 35^\circ\ 15'\ 51.8''$

de donde $2\varphi = 70^\circ\ 31'\ 43.6''$ [9]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\log \operatorname{sen}\varphi = \log 0,57\ 73\ 50\ldots = \bar{1},\ 76\ 14\ 39\ 2$, de donde

$\varphi = \text{arc. antilog. } \bar{1},\ 76\ 14\ 39\ 2 = 35^\circ\ 15'\ 51,7''$

10.3 Cálculo de magnitudes especiales del tetraedro regular, en función de su arista "l".

Dentro de este grupo estudiaremos las siguientes:

10.31 Cálculo de la apotema "k" de una cara del tetraedro regular en función de su arista "l".

UNE A4 210 X 297

La apotema k de una cara, es la de un triángulo equilátero (de lado ℓ); el centro de la circunferencia circunscrita al mismo se encuentra a una distancia de dicho lado ℓ, igual al tercio de la altura del triángulo; por consiguiente su valor será:

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ell = 0,28\ 86\ 75\ldots\ \ell = [3, \overline{2, 6}]\,\ell\ [10]$$

10.32 Cálculo de la altura "h" del tetraedro regular, en función de su arista "ℓ".

Seguin se deduce de la proyección I del tetraedro regular, representado en la figura 23, dicha altura es el cateto de un triángulo rectángulo, de hipotenusa ℓ y cateto d cuyo valor se dedujo en [7], párrafo 10.23.

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell = 0,81\ 64\ 97\ldots\ \ell = [1, \overline{4, 2}]\,\ell\ [11]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{3}{9}\ell^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{3}} = \sqrt{\frac{2\ell^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ell = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell$$
$$= (1, \overline{4, 2})\,\ell$$

10.33 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del tetraedro regular

De las fórmulas [7] y [10] se deduce $d = 2k$ [12]

De las fórmulas [11], [5] y [8] se deduce $h = a + c = \frac{4}{3}a = 4c$ [13]

UNE A 4 210 X 297

De las fórmulas [5] y [8] se deduce $\boxed{a = 3c}$ [14]

10.34 Cálculo de la superficie "S" del tetraedro regular, en función de su arista "ℓ".

El área S_1 de una cara será la de un triángulo equilátero de lado ℓ, y su valor

$$S_1 = \frac{\ell}{2} \times \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2$$

El área total S, será igual a

$$S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 = \sqrt{3}\cdot\ell^2 = 1,73\ 20\ 51\ldots\ \ell^2 \qquad [15]$$
$$= 1\ (\widehat{1,2})\ \ell^2$$

10.35 Cálculo del volumen "V" del tetraedro regular, en función de su arista "ℓ".

Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio c de la esfera inscrita al tetraedro; su volumen V_1 valdrá

$$V_1 = \frac{1}{3}\,S_1\,c = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,\ell^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12}\,\ell = \frac{\sqrt{2}}{48}\,\ell^3$$

y el volumen total V, será igual a

$$V = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{48}\,\ell^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\ell^3 = 0,11\ 78\ 51\ldots\ \ell^3 \qquad [16]$$
$$= [\,8.\ \widehat{2,16}\,]\ \ell^3$$

UNE A4 210 X 297

10.4 Resumen del cálculo de magnitudes del tetraedro regular, en función de la arista $\hat{\ell}$ del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 10.21 a 10.24 y 10.31 a 10.35, cuya nomenclatura es la siguiente:

a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 10.21, fórmula 5).

b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 10.22, fórmula 6).

c Radio de la esfera inscrita (párrafo 10.23, fórmula 8).

d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 10.23, fórmula 7).

2φ Ángulo del diedro (párrafo 10.24, fórmula 9).

k Apotema de una cara (párrafo 10.31, fórmula 10).

h Altura del tetraedro (párrafo 10.32, fórmula 11).

Relaciones entre magnitudes (párrafo 10.33, fórmulas 13, 13 y 14).

S Superficie (párrafo 10.34, fórmula 15).

V Volumen (párrafo 10.35, fórmula 16).

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,l$	0, 61 23 72.... l
b	$\frac{\sqrt{2}}{4}\,l$	0, 35 35 53.... l
c	$\frac{\sqrt{6}}{12}\,l$	0, 20 41 24.... l
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,l$	0, 57 73 50..... l
2φ	sen $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0, 57 73 50.... $2\varphi = 70° 31' 43{,}4''$
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,l$	0, 28 86 75..... l
h	$\frac{\sqrt{6}}{3}\,l$	0, 81 64 97..... l
S	$\sqrt{3}\,l^2$	1, 73 20 51.... l^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,l^3$	0, 11 78 51..... l^3
Relaciones entre magnitudes		
$h = a + c$ $\quad h = \frac{4}{3}a$ $\quad h = 4c$ $a = 3c$ $\quad d = 2k$		

10.5 Representación en el sistema diédrico del tetraedro regular de lado "l" por proceso gráfico - analítico.

Antes de detallar esta representación, vamos a exponer unas consideraciones generales que servirán igualmente para

UNE A4 210 X 297

los restantes poliedros regulares.

10.51 Consideraciones previas

El proceso gráfico-analítico consiste simplemente en obtener la representación gráfica de las figuras, no en forma exclusivamente geométrica, como se ha realizado en las construcciones estudiadas en el párrafo 10.1, sino auxiliándose en el dibujo de magnitudes previamente calculadas.

Este proceso tiene gran analogía con el seguido en el Dibujo técnico, donde la representación de los objetos, se hace generalmente a escala, figurando en él las dimensiones del mismo mediante cifras de cota, que cuando son independientes se fijan por el proyectista y cuando no lo son se calculan previamente.

En el estudio que estamos realizando sobre los poliedros regulares nos encontramos en este último caso, ya que todas las magnitudes calculadas lo son en función del dato único $\widehat{l}$, longitud de su arista.

El proceso gráfico-analítico permite realizar su trazado a escala para cualquier longitud fijada a la arista $\widehat{l}$ del poliedro, obteniéndose con rapidez y exactitud su representación, en la que los errores gráficos quedan notablemente reducidos. Por otra parte, pueden acotarse sus medidas fundamentales con cifras prácticamente exentas de error, ya que dependen de un cálculo ana-

UNE A4 210 X 297

lítico y no obtenidas por medición directa sobre el dibujo, afectadas siempre de errores tanto mayores cuanto más pequeña sea la escala de representación.

Otra ventaja de este proceso es la de poder fijarse analíticamente, mediante coordenadas cartesianas, la situación y posición de la figura en relación con los planos de proyección, lo cual permite plantear problemas de representación mediante datos adecuados que conducen siempre a un resultado único.

Los ejercicios de estudio que presentamos en este trabajo, están previstos para poder realizarlos en formato normalizado A4 vertical (ver ficha N. 4202) y a la escala normalizada de 1:2.5. El cajetín de rotulación puede elegirse a voluntad adaptándose a la altura total fijada en 40 m.m. *
Para uniformidad en el tamaño real de las figuras, hemos considerado constante en todas ellas el radio $\hat{a}$ de la esfera circunscrita, el cual es el calculado para el icosaedro regular de arista igual a 100 m.m. Este radio constante tiene por valor numérico $a = 95.1$ m.m.; esto justifica sean números decimales las longitudes de las aristas de los distintos poliedros regulares fijadas como datos de representación, excepto la del icosaedro regular.

* El que hemos adoptado en las figuras, es de tipo discontinuo, detallado en la obra del autor "Dibujo.- Primer curso. Grado de Aprendizaje, 1ª parte" en las páginas 6 a 8.

UNE A4 210 X 297

Págs.

71 al 80

EUITIS
BIBLIOTECA

10.52 Ejercicio de aplicación al tetraedro regular del procedimiento gráfico - analítico.

ENUNCIADO.- Representar en el sistema diédrico, con tres proyecciones, y a escala 1:2,5, un tetraedro regular de 155,3 mm de arista, de forma que una de sus caras (base) sea paralela al plano $\widehat{II}$ y uno de los lados de dicha cara, perpendicular al eje $\widehat{+X}$. El centro $\widehat{O}$ del tetraedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) mm, y está por encima de la cara base.

SOLUCION

Refiriéndonos a la figura 24, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1ª Recuadrado del papel A4 V (a 5 mm. del borde), colocación del cajetín y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2ª Calcular, de acuerdo con los valores del cuadro sinóptico incluido en el párrafo 10.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{d}$, $\widehat{k}$ y $\widehat{h}$. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes:

$a = 95,1$; $b = 54,9$; $c = 31,7$; $d = 89,7$; $k = 44,8$; $h = 126,8$.

3ª. Situar sobre el dibujo, en sus tres proyecciones, el centro del tetraedro $\widehat{O}$, de acuerdo con sus coorde-

UNE A4 210 X 297

nadas y escala.

4ª Dibujar directamente cada proyección de acuerdo con la escala y magnitudes acotadas en la mencionada figura 24, así como la posición fijada en el enunciado.

5ª Numerar sus vértices del 1 al 4 en sus tres vistas

6ª Acotar con cifras las dimensiones calculadas y comprobar la amplitud del ángulo $\widehat{2\varphi}$ en la proyección $\overline{I}$ (con el semicírculo graduado).

Durante el trazado de las proyecciones podrán efectuarse comprobaciones gráficas de magnitudes o de tangencias que nos advertirán sobre posibles errores de escala o falta de exactitud en el traslado de cotas al dibujo. Al emplear el procedimiento descrito anteriormente, son innecesarios los trazados clásicos de la Geometría descriptiva (giros y abatimientos) que requieren un escrupuloso trazado.

El proceso gráfico-analítico presenta gran semejanza con el seguido en el Dibujo técnico para la representación de objetos industriales (vistas, cortes y acotación con cifras).

10.53 Desarrollo del tetraedro regular

Los poliedros son figuras geométricas desarrollables, es decir que podemos trasladar todas sus caras a un plano único, conservando un determinado orden de colocación que permita reconstruir el poliedro inicial.

El desarrollo del tetraedro regular (fig. 25) se com-

UNE A4 210 X 297

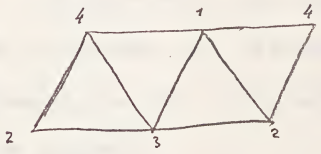

Figura 25

pone de cuatro triángulos equiláteros de lado $\overline{l}$, colocados contiguamente y numerados en el orden que se indica en la figura.

El orden de numeración se corresponde con el dado en perspectiva en la figura 23 y en proyecciones en la figura 24.

11. Exaedro regular

El exaedro regular se compone de seis caras, ocho vértices y doce aristas. Las caras son cuadrados.

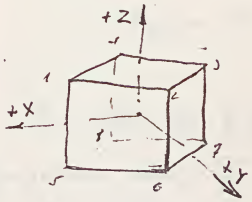

Figura 26

Una perspectiva axonométrica del exaedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 11,51, está representada en la figura 26.

11.1 Representación en el Sistema diédrico del exaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos I, II y III. Situaremos el exaedro con una de sus caras (inferior) paralela al plano II, y una diagonal de dicha cara, perpendicular al eje +X. Los vértices se numerarán del 1 al 8.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el tetraedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado $\overline{l}$, que queda a libre elección.

Refiriéndonos a la figura 27, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

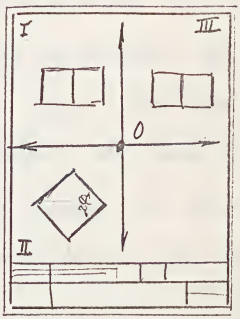

Figura 27

1º Situar previamente los ejes coordenados $\overline{+X,\ +Y,\ +Z}$.

2º Construir en el plano $\overline{II}$ un cuadrado $\overline{II\,(5\cdot6\cdot7\cdot8)}$ de lado $\overline{l}$ y de forma que una diagonal sea paralela al eje $\overline{+X}$ (el lado forma un ángulo de 45º con la diagonal).

Con esta sola figura queda representado el exaedro en su proyección sobre $\overline{II}$.

Las proyecciones sobre $\overline{I}$ y $\overline{III}$ son iguales entre sí, y su contorno es un rectángulo de lado $\overline{5\cdot7}$ (diagonal del cuadrado) y altura $\overline{l}$, por lo que su construcción es inmediata.

Con las construcciones anteriores se obtiene en II la verdadera magnitud del ángulo diedro $\overline{2\varphi}$ del exaedro.

11.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del exaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

UNE A4 210 X 297

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

11.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al exaedro regular, en función de la arista "l".

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él tres cuadrados de lado $\hat{l}$ y tres aristas también iguales a $\hat{l}$, cuyos extremos forman a su vez un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}\,l$ (diagonal del cuadrado).

El radio $\hat{m}$ de la circunferencia circunscrita a este último triángulo equilátero, valdrá

$$m = \frac{(\sqrt{2}\,l)\times\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\,l$$

valor que sustituido en [1] (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\,l\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l = 0.86\ 60\ 25\ldots\,l \qquad [17]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\,l\right)^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{6}{9}\,l^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{2}{3}\,l^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{3\,l^2 - 2\,l^2}{3}}} =$$

$$= \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{l^2}{3}}} = \frac{l^2}{2\,l \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\,l = a} = [1.\widehat{6.2}].$$

UNE A4 210 X 297

11.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del exaedro regular, en función de su arista "l".

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [17] del párrafo 11.21, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l = 0.70\ 71\ 07\ldots\ l \qquad [18]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}l = b} = [1,\widehat{2}]\,l$$

11.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el exaedro regular, en función de su arista "l".

Aun cuando el valor de $\widehat{c}$ es inmediato ($c = \frac{1}{2}l$) lo calcularemos siguiendo el proceso general.

Para ello determinemos previamente el radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a una cara, que será la de un cuadrado de lado $\widehat{l}$, y cuyo valor es

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2}l = 0.70\ 71\ 07\ldots\ l = [1,\widehat{2}]\,l \qquad [19]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el de $\widehat{a}$ del párrafo 11.21

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2} = \frac{1}{2}l = 0.50\ 00\ 00\ l \qquad [20]$$

UNE A4 210 X 297

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2 - \frac{2}{4}\ell^2} = \ell\sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\ell = c}$$

11.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del exaedro regular.

El valor de este ángulo es inmediato ($2\varphi = 90°$); no obstante lo calcularemos siguiendo el proceso general.

Para ello aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$, anteriormente determinadas (fórmulas 20 , 18)

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}\ell : \frac{\sqrt{2}}{2}\ell = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \varphi = 45°$$

$$2\varphi = 90° \qquad [21]$$

11.3 Cálculo de magnitudes especiales del exaedro regular en función de su arista $\widehat{\ell}$.

Dentro de este grupo estudiaremos las siguientes:

11.31 Cálculo de la apotema "k" de una cara del exaedro regular, en función de su arista "ℓ"

Por ser la cara un cuadrado de lado $\widehat{\ell}$, la apotema del mismo tiene el valor

$$k = \frac{1}{2}\ell = 0.\,50\;00\;00\;\ell \qquad [22]$$

UNE A4 210 X 297

11.32 Cálculo de la altura "h" del exaedro regular, en función de su arista "l".

La determinación de esta altura no necesita cálculo alguno, ya que

$$\boxed{h = l} \qquad [23]$$

11.33 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del exaedro regular.

De las formulas [20] y [22] se deduce $\boxed{c = k}$ [24]

De las fórmulas [18] y [19] se deduce $\boxed{b = d}$ [25]

De las fórmulas [23], [20] y [22] se deduce $\boxed{h = 2c = 2k}$ [26]

11.34 Cálculo de la superficie "S" del exaedro regular, en función de su arista "l".

El área S_1 de una cara será la de un cuadrado de lado l, y su valor

$$\boxed{S_1 = l^2}$$

El área total S, será igual a

$$\boxed{S = 6\,l^2} \qquad [27]$$

11.35 Cálculo del volumen "V" del exaedro regular, en función de su arista "l".

Si unimos los vértices de una cara con el centro

UNE A4 210 X 297

del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio $\widehat{c}$ de la esfera inscrita al exaedro; su volumen $\widehat{V_1}$ valdrá

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 c = \frac{1}{3} \ell^2 \frac{\ell}{2} = \frac{1}{6} \ell^3$$

y el volumen total $\widehat{V}$ será igual a

$$V = 6 \times \frac{1}{6} \ell^3 = \ell^3 \qquad [28]$$

11.4 Resumen del cálculo de magnitudes del exaedro regular, en función de la arista $\widehat{\ell}$ del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 11.21 a 11.24 y 11.31 a 11.35, cuya nomenclatura es la siguiente:

$\underline{a}$ Radio de la esfera circunscrita (párrafo 11.21, fórmula 17).

$\underline{b}$ Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 11.22, fórmula 18).

$\underline{c}$ Radio de la esfera inscrita (párrafo 11.23, fórmula 20).

$\underline{d}$ Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 11.23, fórmula 19).

$\underline{2\varphi}$ Ángulo del diedro (párrafo 11.24, fórmula 21).

$\underline{k}$ Apotema de una cara (párrafo 11.31, fórmula 22).

$\underline{h}$ Altura del exaedro (párrafo 11.32, fórmula 23).

UNE A4 210 X 297

Relaciones entre magnitudes (párrafo 11.33, fórmulas 24, 25 y 26).

S Superficie (párrafo 11.34, fórmula 27)

V Volumen (párrafo 11.35, fórmula 28).

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ell$	0, 86 60 25... ℓ
b	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	0, 70 71 07 ... ℓ
c	$\frac{1}{2}\,\ell$	0, 50 00 00... ℓ
d	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ell$	0. 70 71 07... ℓ
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0, 70 71 07 .... $2\varphi = 90°$
k	$\frac{1}{2}\,\ell$	0, 50 00 00... ℓ
h	ℓ	1, 00 00 00... ℓ
S	$6\,\ell^2$	6. 00 00 00.... ℓ^2
V	ℓ^3	1. 00 00 00... ℓ^3
Relaciones entre magnitudes		
$c = k$ $\quad b = d$ $\quad h = 2c$ $\quad h = 2k$		

UNE A4 210 X 297

Págs.

81 al 90

11.5 Representación en el sistema diédrico del exaedro regular de lado "l" dado, por proceso gráfico-analítico.

11.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el sistema diédrico, con tres proyecciones y a escala 1:2,5, un exaedro regular de 109,8 mm de arista, de forma que una de sus caras (base) sea paralela al plano $\widehat{II}$ y una diagonal de dicha cara, perpendicular al eje $\widehat{+X}$. El centro $\widehat{O}$ del exaedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) mm y está por encima de su cara base.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 27, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4V (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 11.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$, y $\overline{k}$. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: $a = 95,1$; $b = 77,6$; $c = 54,9$; $d = 77,6$; $k = 54,9$.

UNE A4 210 X 297

3ª Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones, el centro del exaedro O, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4ª Tomando como base de trazado los radios $\overline{a = 95,1}$, $\overline{b = 77,6}$ y $\overline{c = 54,9}$, dibujar los sencillos contornos (rectangulares y cuadrados) de sus tres proyecciones, (con la escala graduada) y comprobar las magnitudes gráficas del dibujo $\overline{d = b = 77,6}$; $\overline{k = c = 54,9}$ así como la magnitud del lado $\overline{l = 109,8}$.

5ª Numerar sus vértices del 1 al 8 en un tres vistas

6ª Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

11.52 Desarrollo del exaedro regular

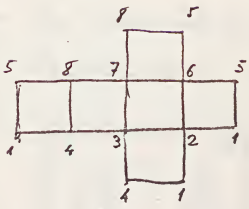

Figura 28

El desarrollo del exaedro regular (fig. 28) se compone de seis cuadrados de lado $\overline{l}$, colocados contiguamente y numerados en el orden que se indica en la figura, que se corresponde a su vez con el de las figuras 26 y 27

12 Octaedro regular

El octaedro regular se compone de ocho caras, seis vértices y doce aristas. Las caras son triángulos equiláteros.

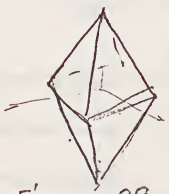

Figura 29

Una perspectiva axonométrica del octaedro regular, acotada con las

UNE A4 210 X 297

dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 12.51, está representado en la figura 29.

12.7 Representación en el sistema diédrico del octaedro regular de lado "l" dado, por procedimientos exclusivamente gráficos.

La representación la efectuaremos en los planos $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$. Situaremos el octaedro con una de sus caras perpendicular al plano $\widehat{I}$, y una diagonal del mismo, perpendicular al plano $\widehat{II}$. Los vértices se numerarán del 1 al 6.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el octaedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado $\widehat{l}$, que queda a libre elección.

Refiriéndonos a la figura 30, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

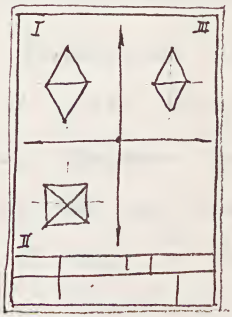

Figura 30.

1º Situar previamente los ejes coordenados $\overline{+X,\ +Y,\ +Z}$.

2º Construir en el plano $\widehat{II}$ un cuadrado $\widehat{II\,(2\cdot3\cdot4\cdot5)}$ de lado $\widehat{l}$ paralelo al eje $\widehat{+X}$, y sus respectivas diagonales.

Con esta sola figura queda representado el octaedro en su proyección sobre $\widehat{II}$. La semidiagonal del cuadrado es el radio $\widehat{a}$ de la esfera circunscrita.

UNE A4 210 X 297

Las proyecciones sobre $\widehat{I}$ y $\widehat{III}$ son iguales entre sí, y su contorno es un rombo de diagonales $\widehat{l}$ paralela a $\widehat{+X}$ y $\widehat{2a}$ paralela a $\widehat{+Z}$, por lo que su construcción es inmediata.

Con las construcciones anteriores se obtiene en $\widehat{I}$ (o en $\widehat{III}$) la verdadera magnitud del ángulo diedro $\widehat{2\varphi}$ del octaedro.

12.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del octaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes.

12.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al octaedro regular, en función de la arista "l".

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él cuatro triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$ y cuatro aristas ~~también~~ iguales a $\widehat{l}$, cuyos extremos forman a su vez un cuadrado también de lado $\widehat{l}$.

El radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita a este último cuadrado, será

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l$$

valor que sustituido en (1) (ver párrafo 9.1) nos da

UNE A4 210 X 297

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0.70\ 71\ 07 \ldots l \qquad [29]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{2l^2}{4}}} = \frac{l^2}{2\sqrt{\frac{l^2}{2}}} = \frac{l^2}{\frac{2l}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} l} = a = [1, \widehat{2}]\, l$$

12.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del octaedro regular, en función de su arista "l"

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [29] del párrafo 12.21, tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{2} l = 0.50\ 00\ 00 \ldots l \qquad [30]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{2l^2}{4} - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2} = \boxed{\frac{1}{2} l}$$

12.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el octaedro regular, en función de su arista "l".

Para ello calculemos previamente el radio "d" de la circunferencia circunscrita a una cara, que siendo un triángulo equilátero, saldrá:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l = 0,57\ 73\ 50 \ldots l = \left[1,\ \widehat{1,2}\right] l \qquad [31]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el $\widehat{a}$ del párrafo 12.21

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} l\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6} l = 0,40\ 82\ 48 \ldots l \qquad [32]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} l\right)^2} = \sqrt{\frac{2\,l^2}{4} - \frac{3\,l^2}{9}} = \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{3}} = \sqrt{\frac{3\,l^2 - 2\,l^2}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l^2}{6}} = \frac{l}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} l} = \left[2,\ \widehat{2,4}\right] l = \boxed{c}$$

12.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del octaedro regular.

Para el cálculo del diedro $\widehat{2\varphi}$ formado por dos caras contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$ obtenidas en 12.22 y 12.23 respectivamente.

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{6}}{6} l : \frac{1}{2} l = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,81\ 64\ 97 \ldots = \left(1,\ \widehat{4,2}\right)$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 54^\circ\ 44'\ 8{,}3''$

de donde $2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$ [33]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

log sen φ = log 0,81 64 97... = $\bar{1}$, 91 19 54 6..., de donde

φ = arc. antilog. $\bar{1}, 91\ 19\ 54\ 6\ldots = 54^\circ\ 44'\ 8{,}3''$

12.3 Cálculo de las magnitudes especiales del octaedro regular, en función de su arista "l".

Dentro de este grupo estudiaremos la siguiente:

12.31 Cálculo de la apotema "k" de una cara del octaedro regular, en función de su arista "l".

La apotema $\widehat{k}$ de una cara es la de un triángulo equilátero de lado $\widehat{l}$; el centro de la circunferencia circunscrita al mismo se encuentra a una distancia de dicho lado $\widehat{l}$, igual al tercio de la altura del triángulo; por consiguiente su valor será:

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,l = 0.\ 28\ 86\ 75\ldots\ l = \left[3,\widehat{2,6}\right] \qquad [34]$$

12.32 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del octaedro regular

De las fórmulas [31] y [34] se deduce $\boxed{d = 2k}$ [35]

De la fórmula [30] se deduce : $\boxed{l = 2b}$ [36]

12.33 Cálculo de la superficie "S" del octaedro regular, en función de su arista "l"

El área S_1 de una cara será la de un triángulo

equilátero de lado $\widehat{l}$, y su valor

$$S_1 = \frac{l}{2} \times \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

El área total $\widehat{S}$, será igual a

$$S = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = 2\sqrt{3}\, l^2 = 3.46\ 41\ 02\ldots\ l^2 \qquad [37]$$
$$= 3\ (\widehat{2,6})$$

12.34 Cálculo del volumen "V" del octaedro regular, en función de su arista "l"

Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y en altura el radio $\widehat{c}$ de la esfera inscrita al octaedro; su volumen V_1 valdrá:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1\, c = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} l = \frac{\sqrt{2}}{24} l^3$$

y el volumen total $\widehat{V}$, será igual a

$$V = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{24} l^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} l^3 = 0.47\ 14\ 05\ldots\ l^3 = (\widehat{2,8,4})\ldots [38]$$

12.4 Resumen del cálculo de magnitudes del octaedro regular, en función de la arista "l" del mismo

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 12.21 a 12.24 y 12.31 a 12.34 cuya nomenclatura es la siguiente:

a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 12.21, fórmula 29)

b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 12.22, fórmula 30)

c Radio de la esfera inscrita (párrafo 12.23, fórmula 32)

d Radio de la esfera circunscrita a una cara (párrafo 12.23, fórmula 31).

2φ Ángulo del diedro (párrafo 12.24, fórmula 33)

k Apotema de una cara (párrafo 12.31, fórmula 34)

Relaciones entre magnitudes (párrafo 12.32, fórmulas 35 y 36)

S Superficie (párrafo 12.33, fórmula 37)

V Volumen (párrafo 12.34, fórmula 38)

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,l$	0,70 71 07.... l
b	$\frac{1}{2}\,l$	0,50 00 00.... l
c	$\frac{\sqrt{6}}{6}\,l$	0,40 82 48.... l
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\,l$	0,57 73 50... l
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	0,81 64 97... $2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\,l$	0,28 86 75... l
S	$2\sqrt{3}\,l^2$	3,46 41 02 ... l^2
V	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,l^3$	0,47 14 05.... l^3
Relaciones entre magnitudes		
$d = 2k$		$l = 2b$

UNE A4 210 X 297

EUITIS BIBLIOTECA

Págs.

91 al 100

12.5 Representación en el sistema diédrico del octaedro regular de lado "l" dado, por proceso gráfico-analítico.

12.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico, con tres proyecciones y a escala 1:2.5, un octaedro regular de 132.5 mm de arista, de forma que una de sus caras sea perpendicular al plano $\overline{I}$ y una diagonal del mismo, perpendicular al plano II. El centro $\overline{O}$ del octaedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) m.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 30, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A 4 v (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 12.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ y $\overline{k}$. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95.1; b = 67.2; c = 54.9; d = 77.6; k = 38.8.

3º Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones,

[illegible] del exaedro D, de acuerdo con sus coordenadas polares.

2º Tomando como base de trazado los radios a = 95.1; b = 67.2, dibujar los sencillos contornos (cuadrado y rombo) en sus tres proyecciones y comprobar con la escala graduada las magnitudes c = 54.9 y l = 134.5, así como la amplitud del ángulo 2φ (con el semicírculo graduado) que se obtiene en su verdadera magnitud en los planos I ó III.

5º Numerar sus vértices del 1 al 6 en sus tres vistas.

6º Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

13.52 Desarrollo del octaedro regular

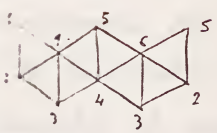

Figura 31

El desarrollo del octaedro regular (fig. 31) se compone de ocho triángulos equiláteros de lado l, colocados contiguamente y numerados (sus vértices) en el orden que se indica en la figura que se corresponde a su vez con los de las figuras 29 y 30.

---

13 Dodecaedro regular

El dodecaedro regular se compone de doce caras, veinte vértices y treinta aristas. Las caras son pentágonos regulares.

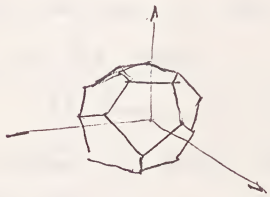

Figura 32

Una perspectiva axonométrica del dodecaedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio del párrafo 13.51, está representada en la figura 32.

13.1 Representación en el sistema diédrico del dodecaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos I, II y III. Para ello situaremos el dodecaedro con una de sus caras (inferior) paralela al plano II y una arista de dicha cara perpendicular al eje +X. Los vértices se numerarán del 1 al 12.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el dodecaedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado "l" que queda a libre elección.

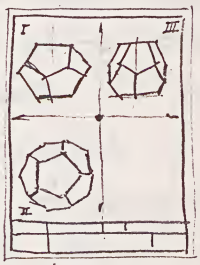

Figura 33

Refiriéndonos a la figura 33, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

1ª Situar previamente los ejes coordenados +X, +Y, +Z.

2ª Construir en el plano II el pentágono regular 16-17-18-19-20 de

UNE A4 210 X 297

forma que el lado 16-20 sea perpendicular a +X (ver ficha P.G. 2354).

3ª Trazar la circunferencia circunscrita al pentágono anterior y bisecar los ángulos centrales, con lo que se obtendrá el nuevo pentágono 1-2-3-4-5 (cara superior)

4ª Construir un nuevo pentágono regular contiguo al lado 16-20 abatido sobre II y hacerlo girar alrededor del lado 16-20 hasta obtener el vértice 15 en la prolongación del radio 0-16.

5ª La circunferencia de centro O y radio 0-15 contiene los vértices del contorno de la vista II, que forman un decágono regular inscrito de lado i. Dichos vértices se obtienen trazando los radios 0-1 ... 0-5 y 0-16 ... 0-20.

6ª La proyección sobre I se obtiene determinando primero la posición de la cara 16-17-18-19-20 (base) que será una recta paralela a +X, y a continuación la de la cara girada 14-9-15-16-20 que será otra recta cuyos vértices se corresponden en I y II. Con esto se obtiene el diedro 28 y el centro O del poliedro en el plano I lo que permite construir fácilmente el contorno y proyección sobre I.

7ª La proyección sobre III se determina fácilmente después de dibujadas las I y II.

UNE A4 210 X 297

13.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del dodecaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes

13.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al dodecaedro regular, en función de la arista "l".

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él tres pentágonos regulares de lado $\widehat{l}$ y tres aristas también iguales a $\widehat{l}$, cuyos extremos forman a su vez un triángulo equilátero de lado igual a la diagonal del pentágono.

El radio $\widehat{d}$ de la circunferencia circunscrita a un pentágono de lado $\widehat{l}$, según enseña la Geometría métrica, vale

$$d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,85\,06\,51\ldots\, l = \qquad [39]$$

El valor de la diagonal $\widehat{p}$ de dicho pentágono regular tiene la expresión, en función de $\widehat{d}$

$$p = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\, d \qquad [40]$$

y el radio $\widehat{m}$ de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero de lado $\widehat{p}$, es de

UNE A4 210 X 297

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3}\, p \qquad [41]$$

sustituyendo en [41] el valor de $\widehat{p}$ según [40] y a su vez en ésta el de $\widehat{d}$ según [39], tendremos:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, l = 0{,}93\ 41\ 72\ldots l \qquad [42]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} \times \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}\, l = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2^2(5+\sqrt{5}) \times (5+\sqrt{5})}}{6\sqrt{10}}\, l =$$

$$= \frac{(5+\sqrt{5}) \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{6\sqrt{10}}\, l = \frac{(5+\sqrt{5}) \times \sqrt{6} \times \sqrt{10}}{60}\, l = \frac{(5+\sqrt{5}) \times \sqrt{60}}{60}\, l =$$

$$= \frac{(5+\sqrt{5}) \times 2 \times \sqrt{15}}{60}\, l = \frac{(5+\sqrt{5}) \times \sqrt{15}}{30}\, l = \frac{5\sqrt{15} + \sqrt{5 \times 15}}{30}\, l =$$

$$= \frac{5\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{30}\, l = \boxed{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, l = m} =$$

Sustituyendo en la fórmula [1]. (ver párrafo 9.1), el valor obtenido para $\widehat{m}$ [42], tendremos:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, l\right)^2}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l = 1{,}40\ 12\ 59\ldots l \qquad [43]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, l\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)^2}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{15+3+2\sqrt{45}}{36}}}\, l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{18 + 6\sqrt{5}}{36}}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{3+\sqrt{5}}{6}}}\, l = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}\, l =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}{2 \times \frac{3-\sqrt{5}}{6}}\, l = \frac{3\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}{3-\sqrt{5}}\, l = \frac{3\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} \times (3+\sqrt{5})}{4}\, l =$$

$$= \frac{3\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}}{6}\, l = \frac{3\sqrt{4(3+\sqrt{5})}}{4}\, l = \frac{6\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}}{4}\, l = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{6}}}{4}\, l = \text{(*)}$$

$$= \frac{6 \times \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}}{4}\, l = \frac{6 \times \left(\sqrt{\frac{5}{12}} + \sqrt{\frac{1}{12}}\right)}{4}\, l = \frac{\sqrt{\frac{36 \times 5}{12}} + \sqrt{\frac{36}{12}}}{4}\, l =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l}$$

(*)

NOTA IMPORTANTE.- La transformación del radical $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$ así como otras análogas que utilizaremos posteriormente está basada en la siguiente propiedad que demostramos a continuación:

"Todo radical de la forma $\sqrt{m \pm n}$ se puede descomponer en dos sumandos de la forma $\sqrt{c} \pm \sqrt{d}$, y c y d serán números racionales siempre que $m^2 - n^2$ sea un cuadrado perfecto."

En efecto, de la igualdad $(p \pm q)^2 = p^2 + q^2 \pm 2pq$, se obtiene, haciendo $p = \sqrt{c}$ y $q = \sqrt{d}$

$$\left(\sqrt{c} \pm \sqrt{d}\right)^2 = c + d \pm 2\sqrt{cd}, \quad \text{de donde}$$

$$\sqrt{c} \pm \sqrt{d} = \sqrt{c + d \pm 2\sqrt{cd}} \qquad (I)$$

Si en la igualdad anterior (I) hacemos $c+d = m$ y $2\sqrt{cd} = n$, se verificará que

$$\sqrt{c} \pm \sqrt{d} = \sqrt{m \pm n} \qquad (II)$$

lo cual nos demuestra la posibilidad de la transformación que afirma la primera parte del enunciado.

Para que se pueda efectuar la igualdad (II) con números racionales, procederemos como sigue:

El sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} c+d = m \\ 2\sqrt{cd} = n \end{array} \right\}$ equivalente al $\left\{ \begin{array}{l} c+d = m \\ cd = \dfrac{n^2}{4} \end{array} \right\}$

tiene como solución

$$(m-d)\,d = \frac{n^2}{4} \quad \text{“} \quad md - d^2 = \frac{n^2}{4} \quad \text{“} \quad d^2 - md + \frac{n^2}{4} = 0$$

$$\vdots$$

de donde $$d = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4 \times \frac{n^2}{4}}}{2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2} \qquad (III)$$

y $$c = m - d = m - \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2} = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - n^2}}{2}. \qquad (IV)$$

UNE A4 210 X 297

es decir, que los valores de "c" y "d" deducidos en (IV) y (III) respectivamente, serán números racionales siempre y cuando $m^2 - n^2$ sea un cuadrado perfecto, según se quería demostrar.

En el desarrollo de cálculo de la hoja nº 97, establecíamos el paso $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$, ya que haciendo $m = 3$ y $n = \sqrt{5}$, se verifica que $m^2 - n^2 = 9 - 5 = 4$, cuadrado perfecto, y por consiguiente, se obtendrá según (III) y (IV)

$$d = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad y$$

$$c = \frac{m \mp \sqrt{m^2 - n^2}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{4}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{5}{2} \end{array} \right\}$$

y que según (II) se verifica para el radical positivo

$$\sqrt{c} \pm \sqrt{d} = \sqrt{m \pm n} \quad \text{o sea} \quad \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

y también se verificará para el radical negativo

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

UNE A4 210 X 297

13.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [43] del párrafo 13.21, tendremos:

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\,l = 1,\ 30\ 90\ 17\ldots\ l \qquad [44]$$

El desarrollo de cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{15+3+2\sqrt{45}}{16} - \frac{1}{4}} \cdot l = \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{4}} \cdot l =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}-2}{8}} \cdot l = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{8}} \cdot l = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{8}} \cdot l = \left(\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{5}{16}}\right) l =$$

* Este paso es aplicación del Teorema expresado en el párrafo 13.21 (págs. 97 a 99), y tiene el siguiente desarrollo:

en el radical $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$ vemos que $7^2 - 3^2 \times 5 = 49 - 45 = 4$ es un cuadrado perfecto, por lo que haciendo $m = 7$ y $n = 3\sqrt{5}$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2}}{2} = \left\{ \begin{matrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{matrix} \right\}$$ de donde

$$\sqrt{7+3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$c = \frac{7 \mp \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2}}{2} = \left\{ \begin{matrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{matrix} \right\}$$

$$\sqrt{7-3\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

UNE A4 210 X 297

Págs.

101 al 110

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) l = \boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l}$$

13.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el dodecaedro regular, en función de su arista "l".

Según hemos visto en el párrafo 13.21, fórmula [37], el valor $\widehat{d}$ del radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular, en función de su lado $\widehat{l}$, es

$$d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1 junto con el $\widehat{a}$, calculado en el párrafo 13.21, nos da

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l =$$

$$= 1.\ 11\ 35\ 16 \ldots\ l \qquad [45]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} l\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} = \sqrt{\frac{15+3+2\sqrt{45}}{16} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{8} - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-20-4\sqrt{5}}{40}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l}$$

13.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del dodecaedro regular.

Para el cálculo del diedro $\widehat{2\varphi}$ formado por dos caras

contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\overline{b}$ y $\overline{c}$ obtenidas en 13.22 y 13.23 respectivamente.

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l : \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0,85\,06\,508\ldots$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l : \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l = \frac{4\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}}{3+\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}\times(3-\sqrt{5})^2}}{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)\times(9+5-6\sqrt{5})}{40}} = \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)\times(7-3\sqrt{5})}{20}} =$$

$$= \sqrt{\frac{77\sqrt{5}+175-165-75\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}+10}{20}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 58^\circ\ 16'\ 57.1''$

de donde $2\varphi = 116^\circ\ 33'\ 54.2''$ [46]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\operatorname{sen} \varphi = 0,85\,06\,508$ $\quad$ $\log.\operatorname{sen} \varphi = \bar{1},929\,7514$

$$\operatorname{sen} \varphi = 58^\circ\ 16'\ 57,1''$$

Como valores complementarios que utilizaremos en cál- (sigue a la vuelta)

13.3 Cálculo de las magnitudes especiales del dodecaedro regular, en función de su arista "l".

Dentro de este grupo estudiaremos las magnitudes siguientes:

13.31 Cálculo del radio "e" de la circunferencia circunscrita a un decágono regular, conocido el radio "b" de la circunferencia inscrita al mismo (que es a su vez el radio de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro) en función de su arista "l"

Según se estudia en la geometría métrica, y teniendo en cuenta la fórmula [44]. del párrafo 13.22, tendremos que

$$b = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, e \qquad \text{de donde}$$

$$e = \frac{4b}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{4 \times \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l = 1.37\ 63\ 84\ldots l \qquad [47]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{4 \times \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\, l = \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}\, l =$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80}\, l = \frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{40}\, l =$$

$$= \frac{(15+5\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{40}\, l = \frac{(10+2\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{40}\, l =$$

$$= \frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20}\, l = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})\times 2\times (5+\sqrt{5})^2}}{20}\, l = \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})\times 2\times (25+5+10\sqrt{5})}}{20}\, l$$

$$= \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})(15+5\sqrt{5})}}{10}\, l = \frac{\sqrt{75+15\sqrt{5}+25\sqrt{5}+25}}{10}\, l = \sqrt{\frac{100+40\sqrt{5}}{100}}\, l =$$

UNE A4 210 x 297

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l}$$

13.32 Cálculo de la apotema "k" de una cara del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

La geometría métrica nos enseña que (ver fórmula [39]

$$k = \sqrt{d^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ l = 0.688192\ldots l \quad [48]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4}}\ l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}-5}{20}}\ l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ l}$$

13.33 Cálculo de la magnitud "g" en las vistas "I" y "III"

Refiriéndonos a la figura 33, podemos observar en la vista III que la cota g es la distancia (altura) a que se encuentran los vértices 11, 12, 13, 14, 15 del plano de la cara inferior 16·17·18·19·20 (base); dicha distancia es la misma que existe entre los vértices 6, 7, 8, 9, 10 y la cara opuesta 1·2·3·4·5.

Consideremos las dos caras contiguas 16·17·18·19·20 y la 9·15·16·20·14 con su arista común 16·20. El diedro formado por ella es 2φ (ver párrafo 13.21).

UNE A4 210 X 297

Aislando estas dos caras contiguas del resto del poliedro, en sus proyecciones sobre $\widehat{I}$ y $\widehat{II}$ obtendremos la representación de la figura 34, en la que la cara $\widehat{9 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 14}$ supuesta primitivamente colocada en el plano de la cara contigua $\widehat{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}$ ha sido girada alrededor de la arista común $\widehat{16 \cdot 20}$ hasta formar el ángulo $\widehat{2\varphi}$.

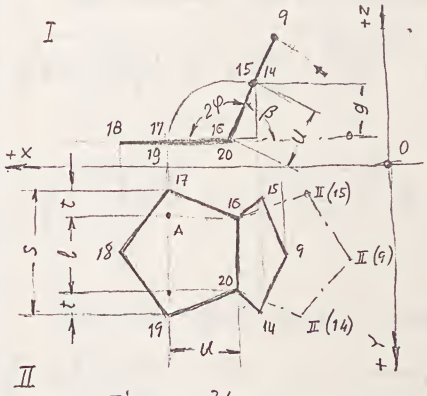

Figura 34

La magnitud $\widehat{g}$ buscada, es función de las $\widehat{s}$, $\widehat{t}$, $\widehat{u}$, que previamente determinamos.

1º Magnitud "s"

Es la diagonal de un pentágono regular de lado $\widehat{l}$, cuyo valor, según nos enseña la Geometría métrica, es

$$s = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l \qquad [V]$$

2º Magnitud "t"

De la figura 34 se deduce:

$$t = \frac{s-l}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l - l}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\, l \qquad [VI]$$

3º Magnitud "u"

Es un cateto del triángulo rectángulo $\widehat{17 \cdot A \cdot 16}$ de hipotenusa $\widehat{l}$ y el otro cateto $\widehat{t}$; por consiguiente será:

$$u = \sqrt{\ell^2 - t^2} = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell \qquad [VII]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,\ell\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}}\,\ell = \sqrt{1 - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}\,\ell = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}}\,\ell = \sqrt{\frac{8-3+\sqrt{5}}{8}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,\ell}$$

Con estos datos previos, podremos determinar finalmente el valor de "g" como proyección de $\widehat{I(u)}$ sobre el el eje $\widehat{+Z}$, por lo que se verificará:

$$g = u\ (\text{sen}\ \beta)$$

mas siendo, $\text{sen}\ \beta = \text{sen}\ 2\varphi$ y conocido el valor $\widehat{u}$ [VII] obtendremos, sustituyendo valores (ver párrafo 13.24)

$$g = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\ell = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell = 0.85\ 06\ 51\ldots\ell \qquad [49]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\ell = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})\times 20}{8\times 25}}\,\ell = \sqrt{\frac{100+20\sqrt{5}}{200}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell}$$

OBSERVACIONES

Al realizar el estudio del cálculo de la magnitud "g" seguimos primeramente otro camino diferente al expuesto en este párrafo, que

UNE A4 210 X 297

siendo mucho más laborioso que éste, nos condujo al mismo resultado numérico, aún cuando la fórmula final surgió de manera intuitiva, según expondremos a continuación.

El proceso de cálculo es análogo al del segundo estudio y consiste en esencia en obtener la proyección del segmento $\overline{I(9.20)}$ ó su igual $\overline{I(9.16)}$ sobre el eje $\overline{+Z}$ (figs 33 y 34).

Refiriéndonos a la figura 34, podemos establecer la longitud del segmento $I(9.20)$ ($\acute{o}$ $I(9.16)$) como suma de los segmentos $\overline{k}$ y $\overline{d}$ (fig. 33), y su proyección sobre el eje $\overline{+Z}$ como suma de los $\overline{g}$ y $\overline{f}$ (fig. 33) por lo que se verificará que

$$g + f = (k + d) \operatorname{sen} \beta \qquad (VIII)$$

pero por otra parte también se verificará (fig. 33) que

$$2g + f = 2c \qquad (VIX)$$

en las ecuaciones $\overline{VIII}$ y $\overline{VIX}$ son ya conocidas las magnitudes $\overline{k}$, $\overline{d}$, $\overline{c}$ y $\overline{\operatorname{sen}\beta}$, e incógnitas las $\overline{f}$ y $\overline{g}$, es decir que tenemos con ambas un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que es resoluble.

Siendo $k = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}\, l$ (ver fórmula [42]), $d = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l$ (ver fórmula [39]) y $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 2\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (ver párrafo 13.24), y sustituyendo estos valores en $\overline{VIII}$, tendremos

$$g+f=\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,l+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\left[\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]l=\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\times\frac{20}{25}}+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\frac{20}{25}}\right)l=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{25}}+\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{25}}\right)l=\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}\right)l$$

Transformando la ecuación VIX

$$2g+f=2c \quad \text{"} \quad g+(g+f)=c, \quad g=c-(g+f)$$

y sabiendo que $\widehat{c}$ tiene el valor (ver fórmula [45])

$$c=\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\,l$$

tendremos finalmente

$$g=\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}}\,l-\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}\right)l=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}}-\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}\right)l \qquad (X)$$

Fórmula final obtenida para $\widehat{g}$ que en principio resulta algo compleja, y que intentamos simplificar sin éxito.

Al no conseguirlo, procedimos al cálculo numérico del coeficiente de $\widehat{l}$ (expresión entre paréntesis en X), que detallamos a continuación:

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}} = 2.\ 22\ 70\ 32\ 7\ldots$$

$$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} = 0.\ 61\ 55\ 36\ 7\ldots$$

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} = 0.\ 76\ 08\ 45\ 2\ldots$$

de donde $g = (2.\ 22\ 70\ 32\ 7 - 0.\ 61\ 55\ 36\ 7 - 0.\ 76\ 08\ 45\ 2)\ell$

$= 0,85\ 06\ 50\ 8\ldots\ \ell$

Obtenido este resultado, nos sorprendió su total coincidencia con el obtenido para el valor de la magnitud $\widehat{d}$ (ver fórmula [39]), radio de la circunferencia circunscrita al pentágono de lado $\widehat{\ell}$, lo que nos indujo a tratar de demostrar la igualdad

$$\cdot g = d$$

o lo que es igual, que se verifique

$$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{4}} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = g$$

lo cual supone una notable simplificación para la obtención del valor de $\widehat{g}$.

Para ello realizamos los cálculos que se detallan a continuación para averiguar si la igualdad anterior conduce a una identidad, como así ha su-

UNE A4 210 X 297

cedido, ya que

$$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{25}} - \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{25}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{25}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{25}}\right)^2$$

$$\frac{25+11\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{25} - 2\times\sqrt{\frac{(25\times11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{10\times25}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{10+2\sqrt{5}}{25} + 2\times\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{10\times25}}$$

$$\frac{25+11\sqrt{5}}{10} - \frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5+2\sqrt{5}}{25} - \frac{10+2\sqrt{5}}{25} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{10}} + \frac{2}{5}\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{10}}$$

$$\frac{20+10\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{\frac{2\times(5+\sqrt{5})^2}{10}} + \sqrt{\frac{125+55\sqrt{5}+50\sqrt{5}+110}{10}}\right]$$

$$\left(2+\sqrt{5}-\frac{1}{5}\right)\times\frac{5}{2} = \left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{235+105\sqrt{5}}{10}}$$

$$\frac{9+5\sqrt{5}}{2} = \frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{5}}{5} + \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad " \quad \frac{9+5\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}+5}{5} + \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{9+5\sqrt{5}}{2} - (\sqrt{5}+1) = \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad " \quad \frac{9+5\sqrt{5}-2(\sqrt{5}+1)}{2} = \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad "$$

$$\frac{9+5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-2}{2} = \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}} \quad " \quad \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \quad "$$

$$\frac{(7+3\sqrt{5})^2}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \quad " \quad \frac{49+45+42\sqrt{5}}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{94+42\sqrt{5}}{4} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \quad "$$

q. e. q. d.

$$\frac{47+21\sqrt{5}}{2} = \frac{47+21\sqrt{5}}{2}$$

identidad final

UNE A4 210 X 297

Págs.

111 al 120

ENITIS
BIBLIOTECA

3.33 Cálculo de la magnitud "f" en las vistas "I" y "III"

Refiriéndonos a la figura 33, podemos observar en la vista III que la cota $\widehat{f}$, en función de $\widehat{c}$ y $\widehat{g}$, tiene la siguiente relación:

$$2c = 2g + f \qquad \text{de donde} \qquad f = 2c - 2g$$

siendo (ver fórmula [45]) $\quad 2c = 2 \times \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l$

y a su vez (ver fórmula [47]) $\quad 2g = 2 \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, l$

valores que sustituidos en la primera ecuación, nos da

$$f = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l - \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = 0.\,52\;57\;31\ldots\, l \qquad [50]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l - \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, l = \sqrt{\left(\frac{25+11\sqrt{5}}{10} + \frac{10+2\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{50}}\right) l^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}+20+4\sqrt{5}}{10} - \frac{2}{5} \times \sqrt{(25+11\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}}{10} - \frac{4\sqrt{125+55\sqrt{5}+25\sqrt{5}+55}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-4\sqrt{180+80\sqrt{5}}}{10}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-8\sqrt{45+20\sqrt{5}}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-8\sqrt{(5+2\sqrt{5})^2}}{10}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-8(5+2\sqrt{5})}{10}}\, l = \sqrt{\frac{45+15\sqrt{5}-40-16\sqrt{5}}{10}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l}$$

13.35 Cálculo de la magnitud "i" lado del decágono regular del contorno de la vista "II".

La geometría métrica nos enseña que el lado $\widehat{l_{10}}$ de un decágono regular, en función del radio $\widehat{r}$ de su circunferencia circunscrita, tiene el valor

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, r$$

siendo en nuestro caso $l_{10} = i$ $\quad r = e$

en el cual el valor calculado de e (ver fórmula 47), es

$$e = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l$$

y sustituyendo valores, tendremos

$$i = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,85\ 06\ 51\ldots\, l \qquad [51]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \times \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}\, l = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{20}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10}}\, l = \sqrt{\frac{16+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{10}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l}$$

13.36 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del dodecaedro regular

De las fórmulas [47] y [48] se deduce $\qquad e = 2k \qquad [52]$

De las fórmulas [39], [47] y [51] se deduce $\qquad d = g = i \qquad [53]$

UNE A4 210 x 297

De las fórmulas [49], [50] y [48] se deduce que

$$g + f = 2k \qquad [54]$$

ya que

$$2k = 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell$$

y $\quad g + f = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2}}\,\ell$

El desarrollo de este último cálculo es el siguiente:

$$\boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}\,\ell + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} + 2\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\times\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{100}}}\,\ell = \sqrt{1 + 2\times\sqrt{\frac{20}{100}}}\,\ell = \sqrt{1 + 2\times\frac{2\sqrt{5}}{10}}\,\ell =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}\,\ell = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell}$$

13.37 Cálculo de la superficie "S" del dodecaedro regular, en función de su arista "ℓ"

El área S_1 de una cara será la de un pentágono regular de lado ℓ y apotema k (ver fórmula [48])

$$S_1 = \frac{5}{2}\ell\times k = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell^2$$

y el área total S, será

$$S = 12\times\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell^2 = 3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\ell^2 = 20,\,64\,57\,29\ldots\,\ell^2 \qquad [55]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

UNE A4 210 X 297

$$12 \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l^2 = 30 \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l^2 = 3\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5}) \times 10^2}{20}}\, l^2 =$$

$$= 3 \times \sqrt{\frac{500+200\sqrt{2}}{20}}\, l^2 = \boxed{3 \times \sqrt{25+10\sqrt{5}}\, l^2}$$

13.38 Cálculo del volumen "V" del dodecaedro regular, en función de su arista "l"

Si uniemos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara y su altura el radio $\hat{c}$ de la esfera inscrita al dodecaedro; su volumen $\hat{V_1}$ valdrá: (ver fórmula [45])

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 c = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l^3$$

y el volumen total

$$V = 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} l^3 = 7,66\,31\,19..\, l^3\ [56]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$12 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l^3 = 10 \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{800}}\, l^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{8}}\, l^3 = \sqrt{\frac{(10+4\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{16}}\, l^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{250+100\sqrt{5}+110\sqrt{5}+220}}{4}\, l^3 = \frac{\sqrt{470+210\sqrt{5}}}{4}\, l^3 =$$

pero siendo $470^2 - (210\sqrt{5})^2 = 400 = 20^2$ (ver nota pá-

UNE A4 210 X 297

rrafo 13.21) $V = \frac{\sqrt{\frac{470+20}{2}} + \sqrt{\frac{470-20}{2}}}{4} l^3 = \frac{\sqrt{245} + \sqrt{225}}{4} l^3 =$

$= \frac{\sqrt{7^2 \times 5} + \sqrt{15^2}}{4} l^3 = \boxed{\frac{7\sqrt{5} + 15}{4} l^3}$

13.4 Resumen del cálculo de magnitudes del dodecaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 13.21 a 13.24 y 13.31 a 13.38, cuya nomenclatura es la siguiente:

a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 13.21, fórmula 43)

b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 13.22, fórmula 44)

c Radio de la esfera inscrita (párrafo 13.23, fórmula 45)

d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 13.21, fórmula 39)

2φ Ángulo del diedro (párrafo 13.24, fórmula 46)

e Radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno de la vista $\widehat{II}$ (párrafo 13.31, fórmula 47)

f Altura intermedia del contorno de las vistas $\widehat{I}$ y $\widehat{III}$ (párrafo 13.34, fórmula 50)

UNE A4 210 X 297

g Alturas extremas del contorno de las vistas I y III (párrafo 13.33, fórmula 49)

i Lado del decágono regular, contorno de la vista II (párrafo 13.35, fórmula 51)

k Apotema de una cara (párrafo 13.32, fórmula 48)

Relaciones entre magnitudes (párrafo 13.36, fórmulas 52, 53 y 54)

S Superficie (párrafo 13.37, fórmula 55)

V Volumen (párrafo 13.38, fórmula 56).

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\ \ell$	1, 40 12 59.... ℓ
b	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}\ \ell$	1, 30 90 17..... ℓ
c	$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\ \ell$	1, 11 35 16..... ℓ
d	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51.... ℓ
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	0, 85 06 51.... $2\varphi = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$
e	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ \ell$	1, 37 63 82..... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31..... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51..... ℓ
i	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51..... ℓ
k	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91..... ℓ
S	$3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ \ell^2$	20, 64 57 29..... ℓ^2
V	$\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\ \ell^3$	7, 66 31 19..... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes

$e = 2k$ $\qquad d = g = i$ $\qquad g + f = 2k$

13.5 Representación en el sistema diédrico del dodecaedro regular de lado "l" dado, por proceso gráfico-analítico.

13.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico, con tres proyecciones y a escala 1:2,5, un dodecaedro regular de 67,9 mm de arista, de forma que una de sus caras (inferior) sea paralela al plano II y una arista de dicha cara, perpendicular al eje +X. El centro O del dodecaedro tiene por coordenadas reales O(120, 120, 150) mm.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 33, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4 v (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 13.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes a, b, c, d, e, f, g, i, k. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95,1; b = 88,8; c = 75,6; d = 57,7; e = 93,4; f = 35,7; g = 57,7; i = 57,7; k = 46,7.

3º Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones, el

centro $\widehat{O}$, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4º Tomando como base las cotas calculadas construir directamente sus proyecciones sobre $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$, comprobando con sencillas construcciones geométricas los resultados gráficos (igualdad de divisiones en las circunferencias circunscritas a los polígonos regulares cuyo lado se conoce previamente). Comprobar igualmente la amplitud del ángulo 2φ (con el semicírculo graduado) que se obtiene en su verdadera magnitud en la vista $\widehat{I}$.

5ª Numerar sus vértices 1 al 20 en sus tres vistas.

6ª Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

13.52 Desarrollo del dodecaedro regular

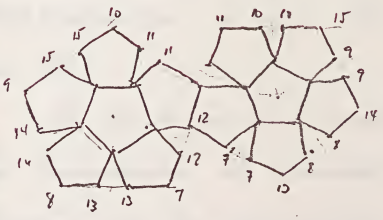

Figura 35

El desarrollo del dodecaedro regular (fig. 35) se compone de doce pentágonos regulares de lado $\widehat{l}$, colocados contiguamente y numerados sus vértices en el orden que se indica en la figura 35, que se corresponde a su vez con los de las figuras 33 y 34.

---

14 Icosaedro regular

El icosaedro regular se compone de veinte caras, doce

UNE A4 210 X 297

vértices y treinta aristas. Las caras son triángulos equiláteros.

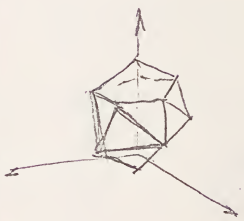

Figura 36

Una perspectiva axonométrica del icosaedro regular, acotada con las dimensiones que se fijan en el ejercicio 14.51, está representada en la figura 36.

14.1 Representación en el sistema diédrico del icosaedro regular de lado "l" dado, por proceso exclusivamente gráfico.

La representación la efectuaremos en los planos I, II y III. Para ello situaremos el icosaedro con un eje (diámetro de la esfera circunscrita) perpendicular a II y una de las cinco caras con vértice en un extremo de dicho eje, perpendicular a I. Los vértices se numerarán del 1 al 12.

No tendremos en cuenta las distancias relativas a que se encuentra el icosaedro con respecto a los planos de proyección, ni la magnitud del lado l que queda a libre elección.

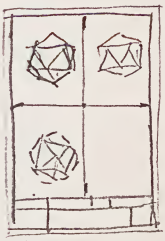

Figura 37

Refiriéndonos a la figura 37, efectuaremos las siguientes construcciones geométricas:

1º Situar previamente los ejes coordenados +X, +Y, +Z.

UNE A4 210 X 297

Págs.

121 al 130

2º Construir en el plano $\widehat{II}$ el pentágono regular $\widehat{7-8-9-10-11}$ de forma que el lado $\widehat{8-9}$ sea perpendicular a $\widehat{+X}$. (ver ficha P.G. 2354).

3º Trazar la circunferencia circunscrita al pentágono anterior y bisecar los ángulos centrales, con lo que se obtendrá el nuevo pentágono $\widehat{2-3-4-5-6}$, así como el contorno de la vista II. Los radios de ambos pentágonos completan la proyección sobre II, debiendo tenerse en cuenta su visibilidad.

4º La proyección sobre $\widehat{I}$ se obtiene determinado previamente la posición de la cara $\widehat{I(8-9-12)}$, mediante el giro de la cara abatida $\widehat{II(8-9-12)}$, alrededor de un eje perpendicular a $\widehat{I}$ que pase por $\widehat{12}$ y que al mismo tiempo nos sirve para determinar la posición del centro $\widehat{I(0)}$ de la esfera circunscrita. Conocida la posición del centro $\widehat{0}$ y la proyección del icosaedro sobre $\widehat{II}$, el trazado completo de la vista $\widehat{I}$, es inmediato. El diedro $\widehat{2\Phi}$ se proyecta en su verdadera magnitud en el ángulo $\widehat{I(12-9-3)}$ y también en el opuesto $\widehat{I(1-6-11)}$.

5º La proyección sobre $\widehat{III}$ se determina fácilmente después de dibujadas las $\widehat{I}$ y $\widehat{II}$.

14.2 Cálculo de las magnitudes fundamentales del icosaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

Siguiendo el criterio establecido en el párrafo 9.1, determinaremos analíticamente las siguientes magnitudes:

UNE A4 210 X 297

14.21 Cálculo del radio "a" de la esfera circunscrita al icosaedro regular, en función de su arista "l"

Considerando un ángulo sólido del mismo, concurren en él cinco triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$ y cinco aristas ~~también~~ iguales a $\widehat{l}$, cuyos extremos forman a su vez un pentágono regular también de lado $\widehat{l}$.

El radio $\widehat{om}$ de la circunferencia circunscrita a este último pentágono regular, nos enseña la Geometría métrica tiene el valor

$$m = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l$$

valor que sustituido en [1] (ver párrafo 9.1) nos da

$$a = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - m^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l = 0.95\ 10\ 57\ldots l \quad [57]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{l^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\, l^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}}\, l =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}\, l = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{2 \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = \frac{5 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{5-\sqrt{5}}\, l = \frac{5 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times (5+\sqrt{5})}{20}\, l$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times (5+\sqrt{5})^2}}{4}\, l = \frac{\sqrt{\frac{20}{10} \times (5+\sqrt{5})}}{4}\, l = \boxed{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l}$$

UNE A4 210 X 297

14.22 Cálculo del radio "b" de la esfera tangente a las aristas del icosaedro regular, en función de su arista "l"

Según la fórmula [3] deducida en el párrafo 9.1, y la [57] del párrafo 14.21, tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}l = 0,\,80\;90\;17\ldots l \qquad [58]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{4}}\;l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}-4}{16}}\;l =$$

$$= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\,l\;;$$ pero siendo $6^2 - (2\sqrt{5})^2 = 16 = 4^2$ (ver nota párrafo 13.21), sigue

$$b = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\,l = \frac{\sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}}}{4}\,l = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,l}$$

14.23 Cálculo del radio "c" de la esfera inscrita en el icosaedro regular, en función de su arista "l"

Para ello calculemos previamente el radio $\hat{d}$ de la circunferencia circunscrita a una cara, que siendo un triángulo equilátero, valdrá:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}\,l = 0,\,57\;73\;50\ldots l = [1,\,\widehat{1.2}]\,l \qquad [59]$$

valor que sustituido en la fórmula [2] del párrafo 9.1, nos da, junto con el de $\hat{a}$ del párrafo 14.21

UNE A4 210 X 297

$$c = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\ell = 0.75\ 57\ 61\ldots\ell \quad [60]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\ell\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{3}}\ \ell = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3}}\ \ell =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 8}{24}}\ \ell = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24}}\ \ell = \frac{\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}}$$; pero siendo

$7^2 - (3\sqrt{5})^2 = 49 - 45 = 4 = 2^2$ (ver párrafo 13,21), se sigue que

$$c = \frac{\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}}\ell = \frac{\sqrt{\frac{7+2}{2}} + \sqrt{\frac{7-2}{2}}}{2\sqrt{6}}\ell = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{6}}\ell = \frac{\left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)\times\sqrt{6}}{12}\ell =$$

$$= \frac{\sqrt{27} + \sqrt{15}}{12}\ell = \boxed{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\ell}$$

14.24 Cálculo del ángulo "2φ" del diedro formado por dos caras contiguas del icosaedro regular

Para el cálculo del diedro $\widehat{2\varphi}$ formado por dos caras contiguas, aplicaremos directamente la fórmula [4], deducida en el párrafo 9.1, función de las magnitudes $\widehat{b}$ y $\widehat{c}$ obtenidas en 14.22 y 14.23 respectivamente

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{c}{b} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{75}}{12}\ell : \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\ell = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} = 0,93\ 41\ 72\ldots$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\ell : \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\ell = \frac{(3\sqrt{3} + \sqrt{15})\times 4}{(1 + \sqrt{5})\times 12} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{75}}{3 + 3\sqrt{5}} = \frac{(3\sqrt{3} + \sqrt{15})\times(3 - 3\sqrt{5})}{-36} =$$

UNE A4 210 X 297

$$= \frac{(3\sqrt{3} + \sqrt{15}) \times (3\sqrt{5} - 3)}{36} = \frac{9\sqrt{15} + 3\sqrt{15 \times 5} - 9\sqrt{3} - 3\sqrt{15}}{36} =$$

$$= \frac{9\sqrt{15} + 15\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 3\sqrt{15}}{36} = \frac{6\sqrt{15} + 6\sqrt{3}}{36} = \boxed{\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}}$$

de cuyo valor se deduce $\varphi = 69° \; 5' \; 41{,}4''$

de donde $2\varphi = 138° \; 11' \; 22{,}8''$ [61]

El desarrollo del cálculo logarítmico es el siguiente:

$\operatorname{sen} \varphi = 0{,}93 \; 41 \; 72 \; 4$ $\qquad \log \operatorname{sen} \varphi = \bar{1}, \; 970 \; 42 \; 70$

$$\operatorname{sen} \varphi = 69° \; 5' \; 41{,}4''$$

Como valores complementarios que utilizaremos en cálculos posteriores, tenemos:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{15 + 3 + 2\sqrt{45}}{36}} = \sqrt{1 - \frac{18 + 2\sqrt{45}}{36}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{18 + 6\sqrt{5}}{36}} = \sqrt{\frac{36 - 18 - 6\sqrt{5}}{36}} = \frac{\sqrt{18 - 6\sqrt{5}}}{6}; \text{ pero siendo}$$

$18^2 - (6\sqrt{5})^2 = 324 - 180 = 144 = 12^2$ (ver párrafo 13.21) se sigue que

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{18 - 6\sqrt{5}}}{6} = \frac{\sqrt{\frac{18 + 12}{2}} - \sqrt{\frac{18 - 12}{2}}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}}$$

y $\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = 2 \times \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6} = \frac{15 - 3}{18} = \frac{2}{3}$

14.3 Cálculo de las magnitudes especiales del icosaedro regular, en función de su arista "l"

Dentro de este grupo, estudiaremos las magnitudes siguientes:

14.31 Cálculo del radio "e" de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado "l"

La Geometría métrica nos enseña que

$$e = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,\ 85\ 06\ 51\ldots\ l \qquad [62]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$e = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\, l = \frac{2\times\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{10-2\sqrt{5}}\, l = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-\sqrt{5}}\, l = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times(5+\sqrt{5})}{20}\, l$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}}{20}\, l = \frac{\sqrt{2\times 20\times(5+\sqrt{5})}}{20}\, l = \sqrt{\frac{40\times(5+\sqrt{5})}{400}}\, l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l}$$

14.32 Cálculo de la apotema "h" de un pentágono regular de lado "l"

La Geometría métrica nos enseña que

$$h = \sqrt{e^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l = 0.\ 68\ 81\ 91\ldots\ l \qquad [63]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} - \frac{1}{4}}\, l = \sqrt{\frac{20+4\sqrt{5}-10}{40}}\, l =$$

$$= \sqrt{\frac{10+4\sqrt{5}}{40}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l}$$

14.33 Cálculo de la magnitud "g" en las vistas "I" y "III"

En la figura 37 y en sus vistas $\widehat{I}$ y $\widehat{II}$ puede deducirse que la altura $\widehat{g}$ es un cateto de un triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el lado $\widehat{l}$ y el otro cateto, conocido, la magnitud $\widehat{e}$ (ver fórmula [62]); por consiguiente:

$$g = \sqrt{l^2 - e^2} = \sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,52\ 57\ 31\ldots\, l \quad [64]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$g = \sqrt{l^2 - \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = \sqrt{\frac{10-5-\sqrt{5}}{10}}\, l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l}$$

14.34 Cálculo de la magnitud "f" en las vistas "I" y "III"

Refiriéndonos a la figura 37, podemos observar en la vista $\widehat{I}$ que la cota $\widehat{f}$, en función de $\widehat{a}$ y $\widehat{g}$, tiene la siguiente relación:

$$2a = 2g + f \qquad \text{de donde} \qquad f = 2(a-g), \text{ o sea}$$

$$f = 2\times\left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}\, l - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l = 0,85\ 06\ 51\ldots\, l \quad [65]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$f = 2\times\left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}\, l - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l\right) = \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\times 4}{10}}\right) l =$$

UNE A4 210 X 297

$$= \left(\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} - \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\right) l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4} + \frac{10-2\sqrt{5}}{5} - 2\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{50+10\sqrt{5}+40-8\sqrt{5}}{20} - 2\sqrt{\frac{100-20}{20}}}\; l = \sqrt{\frac{90+2\sqrt{5}}{20} - 4}\; l = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}\; l =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l}$$

14.35 Cálculo de la magnitud "i", lado del decágono regular del contorno de la vista "II"

La Geometría métrica nos enseña que el lado l_{10} de un decágono regular, en función del radio r de la circunferencia circunscrita, tiene el valor

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, r$$

siendo en nuestro caso $l_{10} = i$ $\quad r = e$ tendremos

$$i = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l = 0,52\ 57\ 31 \ldots\, l \qquad [66]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente,

$$i = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\; l = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{40}}\; l = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}\; l = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20}}\; l =$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}}\; l = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l}$$

14.36 Cálculo de la apotema "k" de una cara del icosaedro regular, en función de su arista "l"

UNE A4 210 X 297

La apotema $\widehat{k}$ de una cara es la de un triángulo equilátero de lado $\widehat{l}$; el centro de la circunferencia circunscrita al mismo se encuentra a una distancia de dicho lado $\widehat{l}$ igual al tercio de la altura del triángulo; por consiguiente su valor será:

$$k = \frac{1}{3}\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,l = 0,28\ 86\ 75\ldots\ l \qquad [67]$$

14.37 Relaciones importantes entre las magnitudes calculadas del icosaedro regular.

De las fórmulas [64] y [66] se deduce $g = i$ [68]

De las fórmulas [67] y [59] se deduce $2k = d$ [69]

De las fórmulas [62] y [65] se deduce $e = f$ [70]

De las fórmulas [64], [65] y [63], se deduce $g + f = 2h$ [71]

ya que $$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,l + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l = 2\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,l$$

La comprobación de la anterior igualdad, es la siguiente:

$$\boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,l + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,l} = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5+\sqrt{5}}{10} + 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\times\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)l^2} =$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{\frac{20}{100}}}\,l = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{10}\times 2}\,l = \sqrt{1+\frac{4\sqrt{5}}{10}}\,l = \sqrt{1+\frac{8\sqrt{5}}{20}}\,l =$$

$$= \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{20}}\,l = \boxed{2\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,l}$$

UNE A4 210 X 297

14.38 Cálculo de la superficie "S" del icosaedro regular, en función de su arista "l"

El área S_1 de una cara, será la de un triángulo equilátero de lado l, y su valor

$$S_1 = \frac{l}{2}\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2$$

El área total S, será igual a

$$S = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2 = 5\sqrt{3}\,l^2 = 8,\,66\;02\;54\ldots\,l^2 \qquad [72]$$

14.39 Cálculo del volumen "V" del icosaedro regular, en función de su arista "l"

Si unimos los vértices de una cara con el centro del poliedro regular, obtendremos una pirámide regular, cuya base es dicha cara, y su altura el radio c de la esfera inscrita; su volumen V_1 valdrá:

$$V_1 = \frac{1}{3}\,S_1\,c = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2\times\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,l = \frac{3+\sqrt{5}}{48}\,l^3$$

EDITIS BIBLIOTECA

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$V_1 = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\,l^2\times\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,l = \frac{\sqrt{3}\cdot(3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{12^2}\,l^3 = \frac{9+\sqrt{45}}{12^2}\,l^3 =$$

$$= \frac{9+3\sqrt{5}}{12^2}\,l^3 = \boxed{\frac{3+\sqrt{5}}{48}\,l^3}$$

y el volumen total V, será igual a

$$V = 20\times\frac{3+\sqrt{5}}{48}\,l^3 = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}\,l^3 = 2,\,18\;16\;95\ldots\,l^3 \qquad [73]$$

UNE A4 210 X 297

Págs.

131 al 135

14.4 Resumen del cálculo de magnitudes del icosaedro regular, en función de la arista "l" del mismo.

A continuación exponemos en forma tabulada los resultados de los cálculos desarrollados en los párrafos 14.21 a 14.24 y 14.31 a 14.39, cuya nomenclatura es la siguiente:

a Radio de la esfera circunscrita (párrafo 14.21, fórmula 57)

b Radio de la esfera tangente a las aristas (párrafo 14.22 fórmula 58)

c Radio de la esfera inscrita (párrafo 14.23, fórmula 60)

d Radio de la circunferencia circunscrita a una cara (párrafo 14.23, fórmula 59)

2φ Angulo del diedro (párrafo 14.24, fórmula 61)

e Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado $\widehat{l}$ y también al decágono regular de lado $\widehat{i}$, contorno de la vista $\widehat{II}$ (párrafo 14.31, fórmula 62)

f Altura intermedia del contorno de las vistas $\widehat{I}$ y $\widehat{III}$ (párrafo 14.34, fórmula 65)

g Alturas extremas del contorno de las vistas $\widehat{I}$, $\widehat{III}$ (párrafo 14.33, fórmula 64)

$\underline{h}$ Apotema de un pentágono regular de lado $\widehat{l}$ (párrafo 14.32, fórmula 63)

$\underline{i}$ Lado del decágono regular, contorno de la vista $\widehat{II}$ (párrafo 14.35, fórmula 66)

$\underline{k}$ Apotema de una cara (párrafo 14.36, fórmula 67)

Relaciones entre magnitudes (párrafo 14.37, fórmulas 68, 69, 70, 71)

$\underline{S}$ Superficie (párrafo 14.38, fórmula 72)

$\underline{V}$ Volumen (párrafo 14.39, fórmula 73)

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\ell$	0, 95 10 57 ... ℓ
b	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ \ell$	0, 80 90 17 .... ℓ
c	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\ \ell$	0, 75 57 61 .... ℓ
d	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell$	0, 57 73 50 .... ℓ
2φ	$\operatorname{sen}\varphi=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	0, 93 41 72 .... $2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 22{,}8''$
e	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51 .... ℓ
f	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 85 06 51 .... ℓ
g	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31 ... ℓ
h	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ \ell$	0, 68 81 91 .... ℓ
i	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ \ell$	0, 52 57 31 ... ℓ
k	$\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell$	0, 28 86 75 .... ℓ
S	$5\sqrt{3}\ \ell^2$	8, 66 02 54 .... ℓ^2
V	$\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ \ell^3$	2, 18 16 95 .... ℓ^3

Relaciones entre magnitudes
$g=i$ $\quad 2k=d$ $\quad e=f$ $\quad g+f=2h$

UNE A4 210 X 297

14.5 Representación en el sistema diédrico del icosaedro regular de lado "l", por proceso gráfico-analítico.

14.51 Ejercicio de aplicación

ENUNCIADO.- Representar en el Sistema diédrico, con tres proyecciones y a escala 1:2,5, un icosaedro regular de 100 mm de arista, de forma tenga un eje (diámetro de la esfera circunscrita) perpendicular al plano $\widehat{II}$ y una de las cinco caras con vértice en un extremo de dicho eje, perpendicular al plano $\widehat{I}$. El centro $\widehat{O}$ del icosaedro tiene por coordenadas reales O (120, 120, 150) mm.

SOLUCIÓN

Refiriéndonos a la figura 37, efectuaremos las siguientes construcciones y operaciones:

1º Recuadrado del papel A4V (a 5 mm del borde), colocación del cajetín (ver párrafo 10.51) y situación de los ejes coordenados a las distancias marcadas en la figura (100 y 117 mm).

2º Calcular, de acuerdo con el cuadro sinóptico incluido en el párrafo 14.4, las dimensiones en milímetros de las magnitudes a, b, c, d, e, f, g, h, i, k. Los resultados de estas operaciones, con una cifra decimal, son los siguientes: a = 95,1; b = 80,9; c = 75,6; d = 57,7; e = 85,1; f = 85,1; g = 52,6; h = 68,8; i = 52,6; k = 28,9

UNE A4 210 X 297

3º Situar sobre el dibujo en sus tres proyecciones, el centro $\widehat{O}$, de acuerdo con sus coordenadas y escala.

4º Tomando como base las cotas calculadas construir directamente sus proyecciones sobre $\widehat{I}$, $\widehat{II}$ y $\widehat{III}$, comprobando con sencillas construcciones geométricas los resultados gráficos. (igualdad de divisiones en las circunferencias circunscritas a los polígonos regulares cuyo lado se conoce previamente). Comprobar igualmente la amplitud del ángulo 2ϕ (con el semicírculo graduado) que se obtiene en su verdadera magnitud en la vista $\widehat{I}$.

5º Numerar sus vértices 1 al 20 en sus tres vistas.

6º Acotar con cifras las dimensiones calculadas.

14.52 Desarrollo del icosaedro regular

Figura 38

El desarrollo del icosaedro regular (fig. 38) se compone de veinte triángulos equiláteros de lado $\widehat{l}$, colocados contiguamente y numerados sus vértices en el orden que se indica en la figura 38, que se corresponde a su vez con los de las figuras 36 y 37

UNE A4 210 X 297

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600107498

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA
INDUSTRIAL DE SEVILLA

ESTANTE.....

TABLA.....

NUMERO 7815